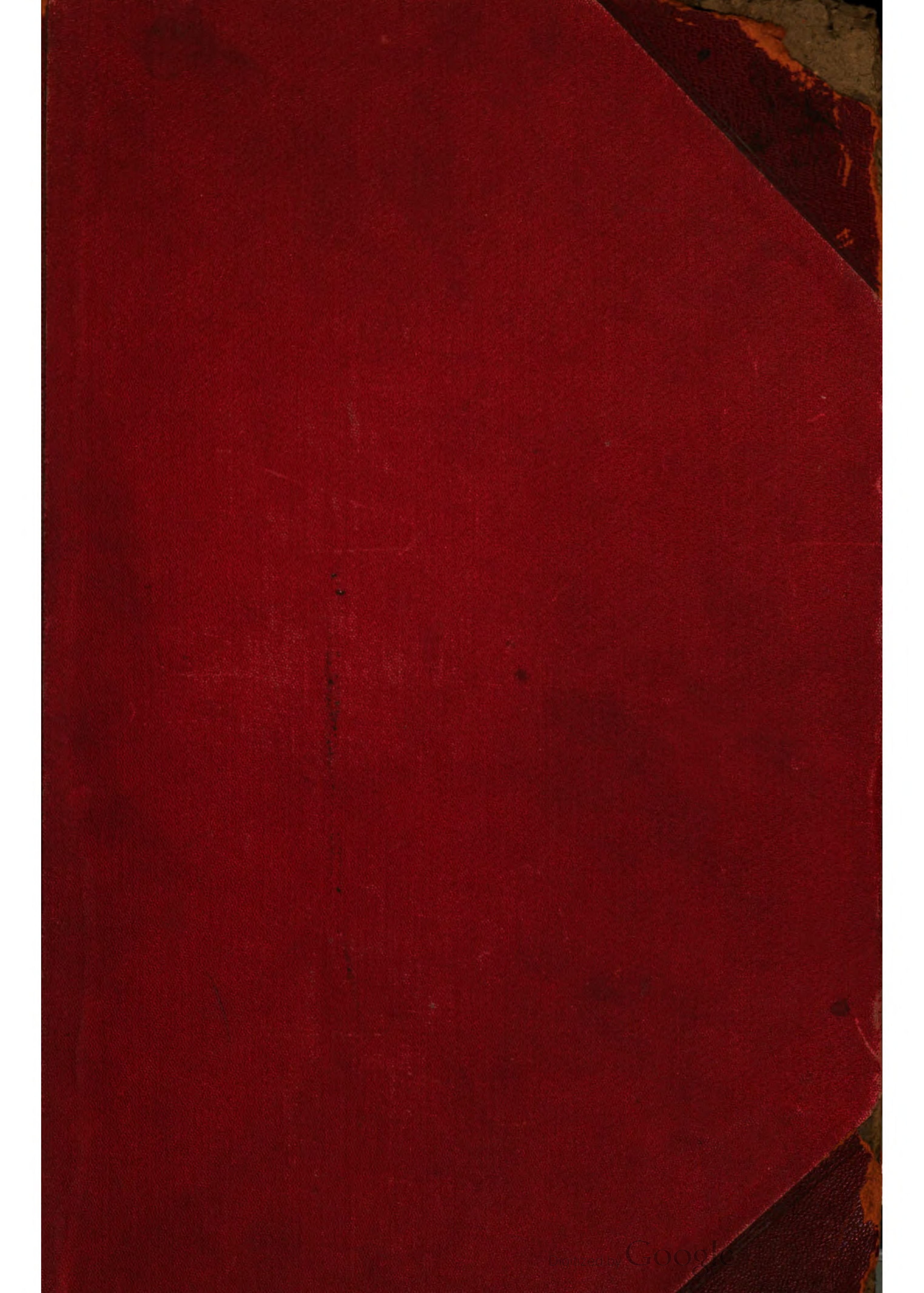
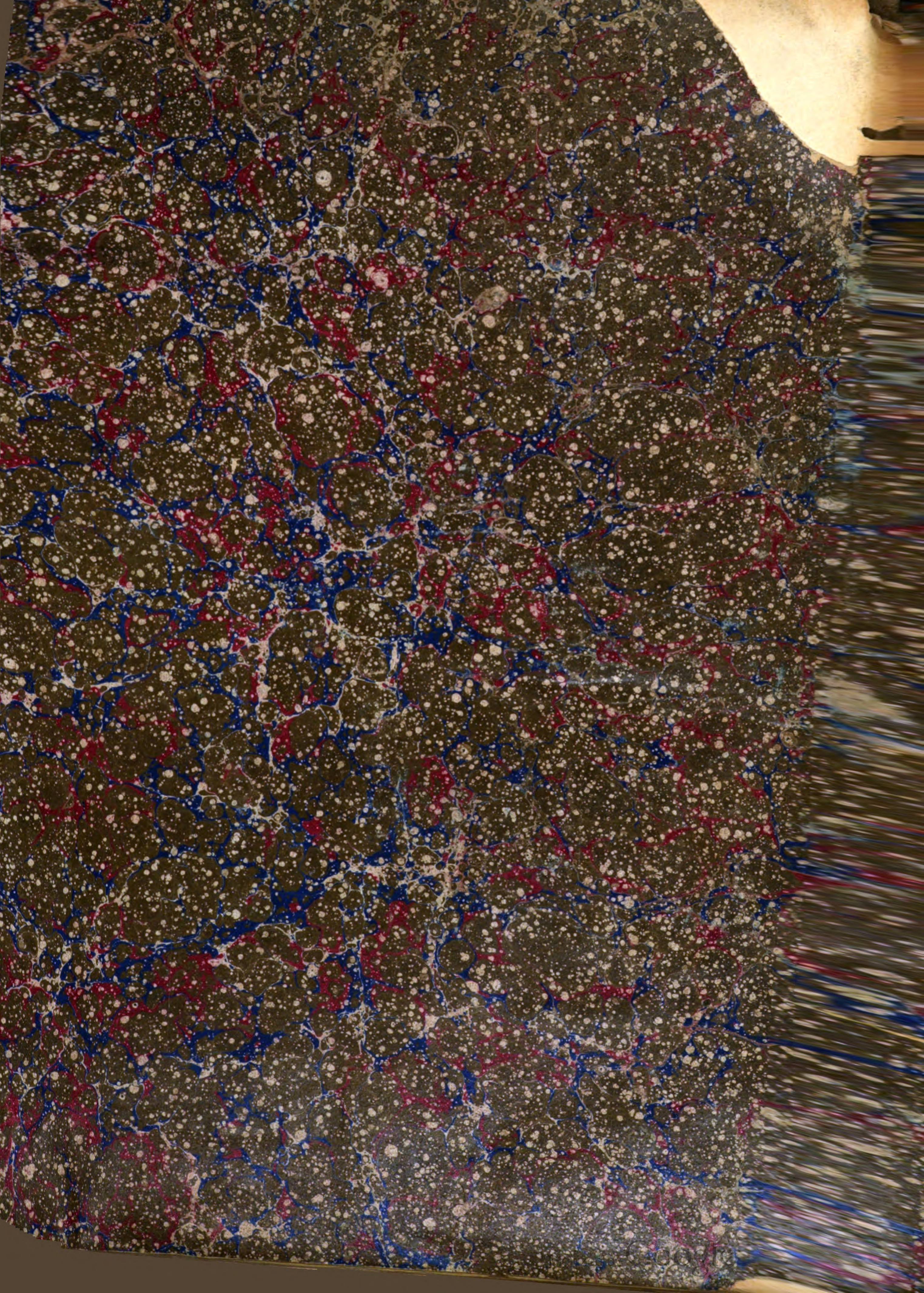
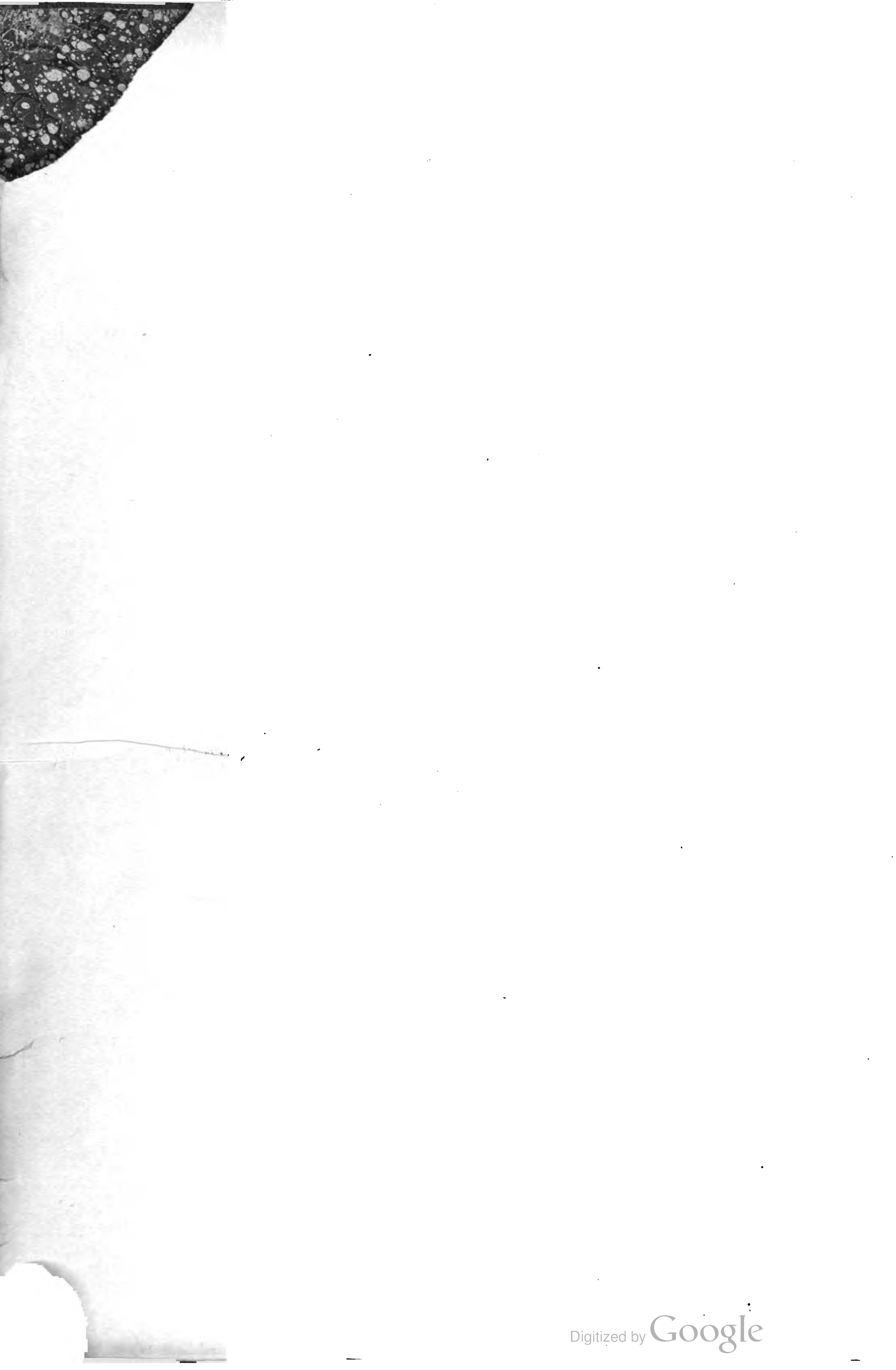




LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
GIFT OF
Göttingen Universität
Received Bd. Dec. 1893.
Accessions No. 53954 Class No.
Digitized by Google





a/

(8)

Ueber die

Reihenentwickelungen der Potentialtheorie.

Von

Maxime Bôcher
aus Cambridge (Mass.) U. S.

Am 4. Juni 1890
von der philosophischen Fakultät der Universität Göttingen
gekrönte Preisschrift.



Göttingen 1891.
Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei (W. Fr. Kaestner).

Das Urtheil der Fakultät lautete:

Die Fakultät ist von dem Fleiss und der Genauigkeit, mit welcher der Verfasser seinem Thema nachgegangen ist, wie von seiner Geschicklichkeit, einen vielseitigen Stoff unter übersichtliche Gesichtspunkte zu fassen, gleichmässig befriedigt und ertheilt demselben daher den vollen Preis.

Die vorliegende Preisschrift gilt zugleich als Dissertation.

Referent Herr Prof. F. Klein.

Tag der mündlichen Prüfung 17. Juni 1891.

Inhaltsverzeichniss.

Vorbemerkungen.

Die philosophische Facultät der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen hat am 4ten Juni 1890 folgende Preisaufgabe gestellt:

»Man kann die Mehrzahl der in der Potentialtheorie auftretenden Reihenentwickelungen und Integraldarstellungen unter einheitlichem Gesichtspunkt ableiten, indem man die sämmtlichen bei diesen Darstellungen in Betracht kommenden Orthogonalsysteme als Ausartungen des Systems confocaler Cycliden betrachtet und unter Zugrundelegung des letzteren zunächst für einen von sechs confocalen Cycliden begrenzten Körper geeignete Reihenentwickelungen aufstellt. Die Facultät wünscht, dass der hiermit bezeichnete Gedanke in's Einzelne durchgeführt, auch von der ganzen Theorie eine zusammenhängende Darstellung gegeben werde.«

In der Vorlesung über »Lamésche Funktionen«, welche von Prof. F. Klein an der hiesigen Universität im Wintersemester 1889—90 gehalten wurde, ist der Grundgedanke der obenstehenden Preisaufgabe wohl zum ersten Male aufgenommen worden; aber nur die allgemeinen Umrisse der Theorie konnten damals, wegen der grossen Ausdehnung des Stoffes, skizzirt werden. Diese Quelle werde ich im Folgenden durch ein (K) andeuten*).

In der vorliegenden Schrift hoffe ich den Zweck der Preisfrage dadurch erreicht zu haben, dass einerseits meine Darstellung der Theorie eine mehr systematische und zusammenhängende ist, wie es in jener Vorlesung sein konnte, wo die Theorie von Tag zu Tag entwickelt werden musste; während andererseits diese Theorie selbst, welche damals nur nach ihren allgemeinen Zügen entwickelt wurde, hier in vielen Punkten in's Einzelne ausgeführt und dadurch vervollständigt wird.

Ich habe aber gefunden, dass eine gründliche und zugleich dem Leser verständliche Darstellung die Grenzen einer Preisarbeit weit überschreiten müsste. Ich habe mich daher entschlossen:

*) Vergl. hierzu die Mittheilung von Herrn Klein in den Göttinger Nachrichten vom März 1890: Zur Theorie der Laméschen Funktionen, insbesondere p. 91 daselbst.

a) Das vorbereitende geometrische Kapitel, welches sich unmittelbar auf mehr oder weniger bekannte Theorien stützt, in der Form eines Referats ohne Erbringung von Beweisen zu fassen, und auch, soviel wie mit dem leichten Verständnis desselben verträglich scheint, abzukürzen (wobei leider insbesondere alle Erläuterungen über die Gestalt der Flächen etc. weggelassen werden mussten); und

b) neben einigen kleineren Abkürzungen in den letzten Kapiteln einen grossen Theil meiner eigenen Untersuchungen über Specialfälle in sehr knappe Form zu setzen.

Ich hoffe, dass es mir in nicht zu ferner Zeit möglich sein wird über diese ganze Theorie eine Veröffentlichung von viel grösserem Umfange zu machen, wo dann viele Mängel, welche der jetzigen Darlegung in Folge der gebotenen Kürze anhaften, beseitigt werden sollen.

Wir werden uns im Folgenden mit einem Problem beschäftigen, welches wir schlechtweg als die Randwerthaufgabe der Potentialtheorie bezeichnen wollen*). Bei diesem Problem wird ein Körper vorgelegt und es wird verlangt innerhalb desselben ein Potential zu bestimmen, welches dort nebst seinen ersten Ableitungen endlich, stetig und eindeutig verläuft und auf der Begrenzung des Körpers beliebig vorgeschriebene Werthe annimmt.

Diese Randwerthaufgabe soll nun im Folgenden für das »Cyclidensechsflach« (so wollen wir den Körper nennen, welcher von sechs confocalen Cycliden begrenzt ist) und seine Ausartungen behandelt werden. Natürlich ist dies längst in zahlreichen Specialfällen geschehen und es wird nicht ohne Interesse sein, an dieser Stelle hierüber eine historische Darlegung zu geben, wenn auch nur die Hauptpunkte berührt werden können. Einen genaueren Bericht über verschiedene Einzelheiten werde ich später im Texte einschalten.

Vor allen ist Laplace (1782) zu nennen, insofern derselbe den von Lagrange herrührenden Begriff des Potentials auf das Problem der Ebbe und Fluth anwendete. Hierdurch wurde er auf die Randwerthaufgabe für die Vollkugel geführt, welche er dann mittelst der von ihm ersonnenen (in unserem Sinne sehr speciellen) Kugelfunktionen löste. Den Anstoss hierzu hatte wohl die Einführung noch speciellerer Kugelfunctionen durch Legendre gegeben.

Wir nennen ferner Fourier (1822), der (von Problemen der Wärmelehre ausgehend) zur Lösung der Randwerthaufgabe unter anderen für das rechtwinklige Parallelepipedon gelangte. Diese Lösung hat er mittelst trigonometrischer Reihen (der sog. Fourierschen Reihen), oder in gewissen Grenzfällen durch Integraldarstellungen geleistet.

*) Die allgemeine Randwerthaufgabe der Potentialtheorie, bei der nicht die Werthe des Potentials V selbst, sondern diejenigen von $V + h\frac{\partial V}{\partial n}$ (wo n die Richtung der Normale) auf der Oberfläche des Körpers vorgeschrieben sind, werden wir im Folgenden nicht betrachten, da sie sich durch unsere Methoden in den von uns behandelten Fällen nicht immer lösen lässt, (nicht einmal immer, wenn $h = \infty$, d. h. wenn die Randwerthe von $\frac{\partial V}{\partial n}$ vorgegeben werden).

Mit der Lösung unseres Problems für das dreiaxige Ellipsoid wird der Name von Lamé (1839) mit Recht verbunden *). Zur Behandlung dieses Problems führte er das, vorher schon von Jacobi für andere Zwecke benutzte, System der elliptischen Coordinaten ein, wodurch ein neuer fundamentaler Gedanke für die Behandlung unserer Aufgabe zur Geltung gelangte, dass es nämlich in erster Linie auf die Wahl passender krummliniger Coordinaten ankommt.

Nach Lamé sind dann noch zahlreiche besondere Körper nach der Methode der Reihenentwickelung von verschiedenen Mathematikern behandelt worden, so von Heine und Liouville, sowie von den Herren C. Neumann und Mehler, wobei sich die Einführung verschiedener neuer Funktionsgattungen (vergl. Kap. II § 6) nöthig erwies. An dieser Stelle mag der Name von Heine besonders hervorgehoben werden, nicht nur wegen der grossen Ausdehnung seiner sonstigen hierhergehörigen Untersuchungen, wie sie in dem »Handbuch der Kugelfunktionen« zusammengestellt sind, sondern auch weil die früheren Untersuchungen Lamé's von ihm auf Räume von mehr wie drei Dimensionen übertragen wurden **).

Die sämmtlichen bis jetzt erwähnten Mathematiker sind vorzugsweise Analytiker. Dagegen nimmt Sir William Thomson, unserer Theorie gegenüber, eine ganz andere Stellung ein, indem er das Problem mehr anschauungsmässig auffasst (wenn dies auch in seiner Darstellung nicht immer klar hervortritt). Von Thomson sind für uns zwei Hauptleistungen zu nennen: 1) Im Jahre 1845 führte er in die Potentialtheorie die Transformation durch reciproke Radien ein, indem er zeigte wie man die Potentialaufgabe für einen beliebigen Körper lösen kann, wenn letzterer aus einem schon behandelten Körper durch *Inversion* hervorgeht. Dieser Gedanke wird, wie wir in Kapitel I sehen werden, in unserer Darstellung von Beginn an eine fundamentale Rolle spielen. 2) Ein zweiter grosser Fortschritt, welcher wir dem genannten Mathematiker verdanken, ist durch den »Appendix B« der »Natural Philosophy« von Thomson und Tait angebahnt. Dort handelt es sich in sehr knapper und schwer verständlicher Weise um Körper welche von Flächen begrenzt sind, welche dem Orthogonalsystem der gewöhnlichen Polarcoordinaten angehören, d. h. von concentrischen Kugeln, Meridianebenen und Rotationskegeln. Zur Behandlung dieser Körper sind keine höheren Functionen nöthig wie Kugelfunktionen, dieses Wort aber im allgemeinsten Sinne genommen, in welchem wir es später gebrauchen werden. Inzwischen ist die bez. Darlegung nicht so sehr wegen der besondern Probleme bemerkens-

---

*) Allerdings hatte Green bereits vorher (1833) viel allgemeinere Untersuchungen über diesen Gegenstand angestellt. Doch sind dieselben nicht so weit durchgeführt, wie diejenigen von Lamé, und ausserdem in einer sehr schwer lesbaren Form gefasst, so dass sie wenig beachtet geblieben sind.

**) In der schon genannten Vorlesung von Herrn Klein sind die Untersuchungen auch zum grossen Theil für den Raum von beliebig vielen Dimensionen geführt worden. Hierauf können wir leider im Folgenden nicht eingehen; doch behalte ich mir vor, bei anderer Gelegenheit den dort vorhandenen allgemeinen Ansatz darzulegen, und durch Berücksichtigung der Specialfälle zu vervollständigen. Einige der so gewonnenen Resultate werden sich dann auch für die mathematische Physik des gewöhnlichen Raumes (Schwingungsprobleme bei dreifach ausgedehnten Massen etc.) von Interesse erweisen.

werth, welche dort zum ersten Mal behandelt wurden, als wegen der neuen in ihr enthaltenen Gesichtspunkte, unter denen hier der Gedanke besonders hervorgehoben werden muss, dass die in Rede stehenden Kugelfunktionen durch die Anzahl ihrer in gewissen Intervallen gelegenen Nullstellen geradezu charakterisirt sind. Dieser Gedanke ist aber erst von Herrn Klein (1881) klar formulirt worden, und zwar wird dieses Oscillationsprincip wie wir es nennen wollen, von ihm gleich auf das nicht zerfallende Orthogonalsystem der allgemeinen confocalen Flächen zweiten Grades (also auf den Fall der elliptischen Coordinaten) angewandt (Math. Ann. Bd. 18).

Diese kleine Uebersicht über die Hauptarbeiten auf diesem Gebiete der mathematischen Physik müssen wir durch Erwähnung der Arbeiten von Herrn Wangerin schliessen. Durch eine von Herrn C. Neumann gestellte Preisaufgabe auf die Randwerthaufgabe für eine Rotationscyclide*) geführt, hat er ein Jahr später (1876) den ersten Ansatz zur Behandlung der Randwerthaufgabe für solche Körper gegeben, welche von confocalen Cycliden der allgemeinsten Art begränzt sind.

In diesen Arbeiten von Herrn Wangerin erscheinen jene Flächen, welche wir Cycliden nennen werden, wohl zum ersten Mal in der Potentialtheorie, und wir wollen diese einleitenden Bemerkungen dadurch schliessen, dass wir noch einen kurzen Ueberblick über die Entstehung der geometrischen Theorie dieser Flächen geben.

Der Name Cyclide wurde ursprünglich von Dupin für diejenige Fläche gebraucht, deren sämmtliche Krümmungslinien Kreise (bezw. Geraden) sind. Inzwischen werden wir, dem Vorgange von Darboux folgend, mit dem Namen Cyclide eine viel allgemeinere Fläche bezeichnen, nämlich eine beliebige Fläche vierter Ordnung, welche den Kugelkreis als Doppelcurve besitzt; die besondere Fläche wird demgegenüber als Dupin'sche Cyclide zu bezeichnen sein **).

Nachdem es sich herausgestellt hatte, dass alle metrische Eigenschaften als Beziehungen zum Kugelkreise aufgefasst werden können, haben sich in den 60er Jahren Laguerre, Moutard und Darboux ganz besonders mit der Theorie der Cycliden beschäftigt. Zu dieser Zeit wurde das Orthogonalsystem, welches aus allgemeinen confocalen Cycliden besteht***), gleichzeitig von Darboux nnd Moutard entdeckt. Diese dreifach orthogonale Flächenschaar benutzte Herr Darboux dann um ein System krummliniger Coordinaten zu definiren, welche wir als cyclidische Coordinaten bezeichnen wollen.

*) In den Berliner Monatsberichten (Februar 1878) hat Herr Wangerin ein anderes Orthogonalsystem von Rotationsflächen behandelt, welches noch allgemeiner ist wie das hier in Betracht kommende System von Rotationscycliden. Diese Untersuchungen greifen aber, da es sich nicht mehr um Cycliden handelt, über die Grenze unserer Betrachtungen hinaus.

**) Die Dupinschen Cycliden sind gegenüber den allgemeinen Cycliden dadurch specialisirt, dass sie vier Doppelpunkte besitzen (von denen höchstens zwei reell sein können). — Vergl. übrigens, wegen der folgenden Angaben über Cycliden, insbesondere Darboux, Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques, Paris 1873.

***) Zwei Cycliden werden confocal genannt, wenn sie (wie zwei confocale Flächen zweiten Grades) in dieselbe den Kugelkreis enthaltende Developpable eingeschrieben sind; vergl. übrigens die späteren Formeln.



Es ist aber das Hauptverdienst dieses Mathematikers ein Instrument geschaffen zu haben, welches zunächst zwar nur zum Studium der Cycliden dienen sollte, welches aber, wie wir bald sehen werden, in der Geometrie und mathematischen Physik überhaupt eine wichtige Rolle spielt. Dieses Instrument ist das System der pentasphärischen Coordinaten, mit welchem wir uns im Kapitel I ausführlich beschäftigen werden. Die grosse Analogie zwischen den Formeln, welche beim Gebrauch dieser Coordinaten auftreten, und den Formeln der Liniengeometrie, welche früher von Herrn Klein entwickelt sind*), ist sofort ersichtlich und wurde von Herrn Klein in einem Aufsatze über »Liniengeometrie und metrische Geometrie« **) ausführlich erklärt und discutirt. Insbesondere wird dort die Theorie der Cyclide mit der Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades in engste Verbindung gebracht.

Die Liniencomplexe zweiten Grades sind von Herrn Klein in seiner Dissertation ***) hinsichtlich der sämmtlichen Specialfälle, welche sie darbieten können, untersucht worden. Hierzu wurde die Weierstrassische Theorie der Elementartheiler herangezogen. Ganz entsprechende Untersuchungen für die Cyclide wurden später (1884) von Herrn Gino Loria in seiner Abhandlung »Geometria della Sfera« ****) durchgeführt. Indess lässt der Letztere dabei die Realitätsbetrachtungen bei Seite, die Herr Klein für die Complexe entwickelt hatte, dieselben wurden erst von Herrn Klein selbst in der schon erwähnten Vorlesung über Lamésche Funktionen (1889—90) auf Cycliden übertragen.

Diese Theorie der Cycliden in Verbindung mit dem obengenannten Oscillationsprincip soll nun die Grundlage für die folgende Darstellung geben, welche wir vorläufig folgendermassen disponiren wollen:

Kapitel I: Geometrisches; insbesondere über confocale Cyclidensysteme. Einführung zugehöriger krummliniger Coordinaten.

Kapitel II: Befriedigung der Potentialgleichung durch Lamésche Producte.

Kapitel III: Lösung der Randwerthaufgabe für Cyclidensechsflache durch Reihen, welche nach diesen Laméschen Producten fortschreiten, wobei denn die sämmtlichen Reihen, die in der Potentialtheorie gebraucht werden, unter ein gemeinsames Schema eingeordnet erscheinen.

Leider müssen wir uns bei Aufstellung der genannten Reihen einstweilen auf die Darlegung ihres formalen Gesetzes beschränken und sämmtliche Convergenzbeweise bei Seite lassen; eine Durchführung der letzteren wäre eine sehr zu wünschende Ergänzung der vorliegenden Arbeit.

---

*) Math. Ann. 2, 1869.

**) Math. Ann. 5, 1871.

***) Bonn 1868. Wieder abgedruckt in Math. Ann. 23. — Vergl. auch die Arbeit von Weiler im 7ten Bande der Math. Ann, 1873.

****) Memorie della Accademia delle Scienze di Torino. Ser. II. Tom. 36.

Kapitel I.

Geometrisches über confocale Cyclidenschaaren.

§ 1. Ueber die Geometrie der reciproken Radien und die pentasphärischen Coordinaten. — Einführung der Cycliden.

Die Transformation durch reciproke Radien oder Inversion spielt, wie schon bemerkt, in der Potentialtheorie eine Hauptrolle, sofern in letzterer alle räumliche Configurationen, welche aus einander durch Inversion hervorgehen, oft geradezu als gleichberechtigt angesehen werden können. Es wird daher zweckmässig sein, vorab allgemein eine, dieser Auffassung entsprechende, Behandlungsweise der Geometrie zu besprechen, welche wir mit Herrn Klein*) als Geometrie der reciproken Radien bezeichnen wollen; eine Disciplin, welche bis jetzt leider keine zusammenfassende Darstellung gefunden hat.

In der elementaren Geometrie betrachtet man alle diejenigen Eigenschaften einer Figur als geometrisch wesentlich, welche durch beliebige Bewegungen, Aehnlichkeitstransformationen und Spiegelungen des Raumes nicht geändert werden.

Fügen wir nun zu den hiermit genannten elementaren Transformationen des Raumes noch die Inversion hinzu, so bekommen wir einen Inbegriff von Operationen, welche wir gemeinsam als Kugelverwandtschaften bezeichnen wollen, indem sie unter allen anderen Punkttransformationen dadurch charakterisirt sind, dass sie jede Kugel (bezw. Ebene) des Raumes in eine andere Kugel (bezw. Ebene) überführen. Nun werden wir in der Geometrie der reciproken Radien nur solche Eigenschaften der Figuren in Betracht ziehen, welche gegenüber beliebiger Kugelverwandtschaft invariant sind**).

---

*) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.“ Erlanger Programm 1872.

**) Man bemerke, dass projective Geometrie und Geometrie der reciproken Radien als Schwesterdisciplinen anzusehen sind, indem die Gruppe der elementaren Geometrie für jede von ihnen nach einer anderen Richtung erweitert wird.

Zur allgemeinen Orientirung betrachten wir zunächst die Geometrie der reciproken Radien in der Ebene (wo wir es dann natürlich mit Kreisverwandtschaften zu thun haben). Dabei können wir uns, im Interesse grösserer Anschaulichkeit unserer Betrachtungen, des Hülfsmittels bedienen, dass wir die Ebene stereographisch auf eine Kugel beziehen. Fassen wir nun diejenigen Collineationen des Raumes ins Auge, welche diese Kugel in sich selbst überführen. Dieselben werden gewissen Transformationen der ursprünglichen Ebene in sich entsprechen, und zwar stellt es sich heraus, dass dieselben geradezu die Gesammtheit aller Kreisverwandtschaften liefern*). Durch den Uebergang zur Kugel kommen wir also, um die Geometrie der reciproken Radien für die Ebene zu studiren, ins Gebiet der projectiven Geometrie des Raumes, wo wir dann zur Festlegung der Punkte gewöhnliche homogene Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 einführen (welche beliebig gewählten Vielfachen der Abstände von den vier Ebenen des Coordinatentetraeders proportional sind). In diesen Coordinaten möge die Gleichung der Kugel lauten: $\Omega = 0$; durch geeignete Wahl der Coordinaten können wir dieses Ω zu einer beliebigen quadratischen quaternären Form der x von nicht verschwindender Discriminante machen. Diese Coordinatenbestimmung nebst der Gleichung $\Omega = 0$ übertragen wir dann auf die Ebene, indem wir einfach jedem Punkte der Ebene dieselben Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 zuordnen, welche der entsprechende Punkt der Kugel besitzt. Die x_1, x_2, x_3, x_4 sind dabei immer durch die Relation $\Omega = 0$ verbunden.

Die so gewonnenen Coordinaten in der Ebene wollen wir nun tetracyclische Coordinaten nennen, denn sie lassen, wie leicht nachzuweisen ist, folgende einfache Interpretation zu (bei der die Bezugnahme auf den dreifach ausgedehnten Raum bei Seite gelassen ist):

Die tetracyclischen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 eines Punktes der Ebene sind proportional beliebig zu wählenden Vielfachen der Potenzen des betreffenden Punktes in Bezug auf vier beliebig zu wählende Grundkreise**). Zwischen den so definirten Grössen besteht eine homogene quadratische Identität von nicht verschwindender Discriminante: $\Omega = 0$.

Nun stellen wir folgende zwei Sätze auf, deren Richtigkeit sofort einzusehen ist:

Die homogene Gleichung ersten Grades zwischen den tetracyclischen Coordinaten stellt einen Kreis (bezw. im Specialfalle eine Gerade) dar.

Kreisverwandtschaften werden durch homogene lineare Substitutionen der tetracyclischen Coordinaten ausgedrückt, welche die Identität $\Omega = 0$ ungeändert lassen.

Durch diese zwei Sätze sehen wir, dass die Geometrie der reciproken Radien der

*) Vergl. den schon erwähnten Aufsatz von Herrn Klein „Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie." Math. Ann. Bd. 5.

**) Natürlich dürfen die vier Grundkreise nicht alle auf einen fünften Kreis senkrecht stehen, denn sonst wären die einzuführenden vier tetracyclischen Coordinaten von einander nicht linear unabhängig. Aehnliches gilt für die Definition pentasphärischen Coordinaten im Raume, wie nicht weiter ausgeführt zu werden braucht.

Ebene wirklich ihren adaequaten analytischen Ausdruck in der Verwendung tetracyclischer Coordinaten findet.

Kehren wir jetzt zur Geometrie der reciproken Radien im Raume zurück. Um hier gerade so zu verfahren, wie wir es in der Ebene gethan haben, müssten wir den Raum von drei Dimensionen auf eine »Kugel« des Raumes von vier Dimensionen stereographisch beziehen. Statt dessen können wir aber gleich die folgende Definition der auf dem genannten Wege zu findenden pentasphärischen Coordinaten an die Spitze stellen:

Die pentasphärischen Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 eines Raumpunktes sind proportional beliebig zu wählenden Vielfachen der Potenzen des betreffenden Punktes in Bezug auf fünf Grundkugeln.

Diese Coordinaten haben dann, wie leicht nachzuweisen ist, folgende Eigenschaften:

Zwischen den fünf pentasphärischen Coordinaten eines Punktes besteht eine homogene quadratische Identität von nicht verschwindender Discriminante $\Omega = 0$.

Die homogene Gleichung ersten Grades zwischen pentasphärischen Coordinaten stellt eine Kugel, bezw. Ebene dar.

Die Kugelverwandtschaften des Raumes werden durch diejenigen homogenen linearen Substitutionen der pentasphärischen Coordinaten geliefert, welche die Identität $\Omega = 0$ ungeändert lassen.

Nimmt man die Grundkugeln eines pentasphärischen Coordinatensystems so an, dass sie einander sämmtlich orthogonal schneiden, so lautet die Identität:

$$\sum_1^5 a_i x_i^2 = 0.$$

Ueber diesen letzten Satz ist nun noch eine Bemerkung im Sinne des Trägheitsgesetzes der quadratischen Formen*) hinzuzufügen. Dasselbe lautet bekanntlich folgendermassen:

Wenn eine quadratische Form von n Veränderlichen mit reellen Coefficienten und von nicht verschwindender Discriminante durch irgendwelche lineare Substitution mit lauter reellen Coefficienten in ein Aggregat von n Quadraten verwandelt wird (was auf ∞ viele Weisen möglich ist), so hängt der Ueberschuss der in diesem Aggregat auftretenden Vorzeichen der einen Art über diejenigen der anderen Art nur von der Natur der Form selbst ab, nicht aber von der besonderen Gestalt der linearen Substitution.

Ersichtlich kann aber die Gleichung einer Kugel im Raume von n Dimensionen (bei Zugrundelegung reeller Coordinaten) als ein Aggregat von Quadraten mit n positiven und einem negativen Vorzeichen geschrieben werden; und dementsprechend werden wir sagen:

Die zwischen unseren pentasphärischen Coordinaten bestehende Iden-

---

*) Vergl. etwa Baltzer „Elemente der Determinanten“ p. 176.

tität $\Omega = 0$ ist im Sinne des Trägheitsgesetzes durch vier Vorzeichen der einen und ein Vorzeichen der anderen Art charakterisirt.

Voraussetzung ist dabei natürlich, dass wir die Coordinaten in reeller Weise eingeführt haben. Dies ist nicht immer nöthig und in der That ist es öfter bequem, die pentasphärischen Coordinaten mit Hülfe imaginärer Grössen geradezu so einzuführen, dass die Identität die Form

$$\sum_1^5 {}_i x_i^2 = 0$$

erhält. Wir wollen hierfür zwei besonders einfache Beispiele anführen, indem wir die $x_1 \ldots x_5$ durch gewöhnliche homogen gemachte rechtwinklige Coordinaten x, y, z, t (wo also $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \frac{z}{t}$ rechtwinklige Cartesische Coordinaten sind) ausdrücken. Die betreffenden Formeln lauten folgendermassen:

$$\text{a}')\quad \begin{aligned} x_1 &= i(x^2+y^2+z^2+t^2), \\ x_2 &= (x^2+y^2+z^2-t^2), \\ x_3 &= 2xt, \\ x_4 &= 2yt, \\ x_5 &= 2zt; \end{aligned} \qquad \text{a}'')\quad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{i}(x^2+y^2+z^2+it^2), \\ x_2 &= -i\sqrt{i}(x^2+y^2+z^2-it^2), \\ x_3 &= 2xt, \\ x_4 &= 2yt, \\ x_5 &= 2zt. \end{aligned}$$

Man bemerke, dass sämmtliche Grundkugeln des Systems a′) reell sind, d. h. dass ihre Gleichungen in gewöhnlichen Cartesischen Coordinaten mit lauter reellen Coefficienten geschrieben werden können. Während aber vier dieser Kugeln x_2, x_3, x_4, x_5 eintheilig sind, d. h. reelle Punkte besitzen, ist die andere, x_1, nulltheilig. Dagegen sind beim Systeme a″) die Grundkugeln x_3, x_4, x_5 reell und eintheilig, x_1 und x_2 aber imaginär.

Hier können wir auch gleich ein anderes einfaches pentasphärisches Coordinatensystem anführen, mit welchem wir es im Folgenden viel zu thun haben werden. Es ist dies nämlich ein Coordinatensystem mit der Identität $2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0$, wobei, wie leicht zu sehen ist, die Grundkugeln x_3, x_4, x_5 einander orthogonal schneiden müssen, während $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ diejenigen Punktkugeln vorstellen, welche in den zwei Durchdringungspunkten von x_3, x_4, x_5 liegen. Das einfachste Beispiel für ein solches Coordinatensystem ist:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2t^2, \\ x_2 &= x^2+y^2+z^2, \\ x_3 &= 2xt, \\ x_4 &= 2yt, \\ x_5 &= 2zt. \end{aligned}$$

Schliesslich mag noch das Verhalten des Unendlichfernen in der Geometrie der reciproken Radien kurz besprochen werden.

In der elementaren Geometrie kommt das Unendlichferne des Raumes überhaupt nicht in Betracht, insofern dasselbe durch sämmtliche Transformationen der bei dieser Geometrie

in Betracht kommenden Gruppe in sich selbst überführt wird. Demgegenüber pflegt man in der projectiven Geometrie von einer unendlich fernen Ebene zu sprechen, indem die Gesammtheit der unendlich fernen Punkte, sofern sie durch eine Collineation in's Endliche geworfen wird, dort eine Ebene ausfüllt. Nun gehen aber sämmtliche unendlich ferne Punkte bei einer Inversion des Raumes in einen einzigen im Endlichen gelegenen Punkt über. Wir werden also in der Geometrie der reciproken Radien von dem unendlich fernen Punkt sprechen. Dieser Punkt wird uns fernerhin oft als Punktkugel erscheinen, d. h. durch eine lineare Gleichung zwischen den $x_1 \dots x_5$ gegeben sein. Setzt man voraus, dass die zwischen den x bestehende Identität die Gestalt

$$\sum_1^5 {}_i x_i^2 = 0$$

habe, so wird diese Gleichung einfach:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i} = 0,$$

wo $R_1, R_2, \dots R_5$ die Radien der Grundkugeln des Coordinatensystems bedeuten.

Jetzt gehen wir weiter indem wir folgende Definition vorausschicken:

Wir bezeichnen alle diejenigen Flächen als Cycliden, welche sich durch eine Gleichung zweiten Grades zwischen pentasphärischen Coordinaten darstellen lassen.

Man überzeugt sich leicht, dass nach der gewöhnlichen (projectiven) Anschauungsweise die hiermit definirten Cycliden im allgemeinen Flächen vierter Ordnung sind (welche den Kugelkreis als Doppelcurve besitzen), und dass umgekehrt alle Flächen vierter Ordnung, welche den Kugelkreis als Doppelcurve besitzen, Cycliden sind; dass aber auch Flächen dritter Ordnung, welche einfach durch den Kugelkreis gehen, sowie alle Flächen zweiter Ordnung als Cycliden angesehen werden müssen. Dabei sind, nach unserer jetzigen Anschauung, diese Flächen dritter Ordnung nichts Anderes als Cycliden, welche durch den unendlich fernen Punkt hindurchgehen, und die Flächen zweiter Ordnung Cycliden, welche im unendlich fernen Punkte einen Doppelpunkt besitzen.

Jetzt stellen wir folgende leicht zu begründende Eigenschaften von Cycliden zusammen:

Cycliden gehen durch Kugelverwandtschaft in Cycliden über.

Die allgemeine Cyclide besitzt fünf Symmetriekugeln, welche einander orthogonal schneiden. Wenn wir diese Kugeln als Grundkugeln eines Systems pentasphärischer Coordinaten mit der Identität $\sum_1^5 {}_i a_i x_i^2 = 0$ wählen, so lautet die Gleichung der Cyclide:

$$\sum_1^5 {}_i a_i \lambda_i x_i^2 = 0.$$

Die Gleichung

$$\sum_1^5 {}_i \frac{a_i x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$$

zwischen pentasphärischen Coordinaten mit der Identität

$$\sum_1^5 {}_i a_i x_i^2 = 0$$

stellt das allgemeine dreifach orthogonale System confocaler Cycliden dar.

§ 2. Auseinandersetzung der Weierstrassischen Theorie der Elementartheiler in ihrer Beziehung zur Theorie der Cycliden.

In diesem Paragraphen werden wir uns mit einer Methode beschäftigen, mit deren Hülfe man sämmtliche Ausartungen der allgemeinen Cycliden systematisch und erschöpfend aufzählen kann. Diese Methode finden wir in der Weierstrassischen Theorie der Elementartheiler*). Letztere Theorie hat, in der Gestalt wie wir sie gebrauchen werden, den Zweck, das volle System der Invarianten einer linearen Schaar quadratischer Formen anzugeben. Man sieht leicht, dass die Classification der Cycliden, bei Zugrundelegung der Geometrie der reciproken Radien, gerade auf das hiermit bezeichnete algebraische Problem zurückkommen muss. In der That wird eine beliebige Cyclide $\Phi = 0$ ebensowohl durch Nullsetzen irgend einer Form der linearen Schaar $\lambda\Omega - \Phi$ dargestellt (unter λ den Parameter der Schaar, unter $\Omega = 0$ die zwischen der $x_1 \ldots x_5$ bestehende Identität verstanden). Nun wird aber die Cyclide durch eine beliebige lineare Substitution der pentasphärischen Coordinaten im Sinne der Geometrie der reciproken Radien nicht geändert. Um also zu entscheiden, ob zwei Cycliden $\Phi = 0$, $\Phi' = 0$ kugelverwandt sind oder nicht, müssen wir zusehen, ob die zwei Formenschaaren $\lambda\Omega - \Phi$ und $\lambda\Omega' - \Phi'$ durch lineare Substitution in einander übergeführt werden können oder nicht. Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hierfür liefert uns aber gerade die Weierstrassische Theorie.

Wir wollen die Formen Ω und Φ des Näheren folgendermassen schreiben:

$$\Omega = \sum_1^5 {}_j \sum_1^5 {}_k a_{jk} x_j x_k,$$

$$\Phi = \sum_1^5 {}_j \sum_1^5 {}_k b_{jk} x_j x_k,$$

und die Discriminante von $\lambda\Omega - \Phi$ in abgekürzter Form durch $| \lambda a_{jk} - b_{jk} |$ bezeichnen.

Diese Discriminante setzt Herr Weierstrass gleich Null und bekommt hierdurch eine Gleichung fünften Grades in λ, deren fünf Wurzeln mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ bezeichnet werden mögen. Damit nun unsere zwei Formenschaaren durch lineare Substitution in einander übergeführt werden können, ist jedenfalls nothwendig, dass diese fünf Wurzeln in den zwei Fällen auf einander projectiv bezogen werden können. Nehmen wir also den allgemeinen Fall, wo die fünf Wurzeln verschieden sind, so werden zwei diesem Falle angehörige Cycliden keineswegs immer kugelverwandt sein. Wir wollen solche

*) Weierstrass: „Ueber bilineare und quadratische Formen" Berliner Monatsberichte 1868.

Cycliden darum aber noch nicht von verschiedener Art nennen. Wir werden den Artbegriff vielmehr umfassender wählen und unsere erste Unterscheidung zwischen verschiedenen Arten von Cycliden darin finden, dass wir die Multiplicitäten in Betracht ziehen, mit denen verschiedene der Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ zusammenfallen mögen. Hierdurch bekommen wir eine Eintheilung in 7 Classen, welche beziehungsweise durch folgende Multiplicitäten der Wurzeln characterisirt sind:

11111, 2111, 311, 221, 41, 32, 5.

Diese Classen sind aber noch einer weiteren Zerspaltung fähig, und hierin liegt das Wesentliche der Weierstrassischen Theorie.

Sei nämlich λ_i eine ν^i-fache Wurzel, so dass die fünfgliedrige Determinante $|\lambda_i a_{jk} - b_{jk}|$ ν^i-fach verschwindet. Nehmen wir ferner an, es verschwänden alle ersten (viergliedrigen) Unterdeterminanten ν_1^i-fach; alle zweiten Unterdeterminanten ν_2^i-fach; etc. Dann sieht man leicht, dass

$$\nu^i > \nu_1^i > \nu_2^i > \dots$$

bis die ν selbst verschwinden. Die Differenzen:

$$e_1^i = \nu^i - \nu_1^i, \quad e_2^i = \nu_1^i - \nu_2^i, \quad e_3^i = \nu_2^i - \nu_3^i, \dots$$

sind also niemals negativ, und es lässt sich ferner beweisen, dass sie den Ungleichheiten genügen:

$$e_1^i \geqq e_2^i \geqq e_3^i \geqq \dots$$

Schreibt man nun:

$$|\lambda a_{jk} - b_{jk}| = \prod_i (\lambda - \lambda_i)^{\nu^i} = \prod_i [(\lambda-\lambda_i)^{e_1^i} (\lambda-\lambda_i)^{e_2^i} \dots],$$

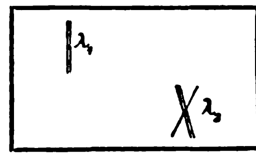
so nennt Herr Weierstrass die einzelnen hier auftretenden Faktoren $(\lambda - \lambda_i)^{e_n^i}$ die Elementartheiler der Formenschaar $\lambda\Omega - \Phi$, und seine Theorie besteht darin, dass neben der schon erwähnten Projectivität der λ_i die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass zwei solche Formenschaaren durch lineare Substitution in einander übergeführt werden können, die Uebereinstimmung der Multiplicitäten e_n^i ihrer Elementartheiler ist.

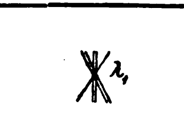
Greifen wir jetzt auf die Unterscheidung nach der Multiplicität der Wurzeln zurück, so werden wir ebensoviele Arten von Cycliden unterscheiden wollen, wie es verschiedene Systeme von Zahlen ν und e gibt. Diese Arteintheilung werden wir durch folgendes Schema festlegen, in welchem die Ziffern die Werthe der e bedeuten sollen, und die Summe der jedesmal zusammengeklammerten Ziffern die zugehörigen ν vorstellen sollen *).

*) So wird z. B. [2 (11) 1] den Fall bedeuten, wo es zwei zweifache und eine einfache Wurzel gibt, und wo die eine Doppelwurzel zu einem zweifachen, die andere zu zwei einfachen Elementartheilern gehört.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*
I	11111	(11)111	(111)11	(11)(11)1	(1111)1	(111)(11)	(11111)
II	2111	2(11)1	2(111)	(21)11	(21)(11)	(211)1	(2111)
III	311	3(11)	(31)1	(311)			
IV	221	2(21)	(22)1	(221)			
V	41	(41)					
VI	32	(32)					
VII	5						

Weiterhin werden wir den einzelnen der hiermit unterschiedenen Fälle auch wohl durch ein geometrisches Schema bezeichnen, indem wir für ihn die Werthe λ_i als Punkte in der complexen λ-Ebene markiren und diese Punkte mit Zeichen versehen, welche durch die Anzahl von Strichen, aus denen sie bestehen, die Multiplicitäten der betreffenden Wurzeln angeben, während die Vertheilung dieser Multiplicität zwischen verschiedenen Elementartheilen dadurch zur Anschauung gebracht wird, dass jedesmal nur diejenigen Striche, welche zu demselben Elementartheiler gehören, einander parallel liegen. So werden z. B. die Fälle IV *b*) [2(21)], und IV *d*) [(221)] durch folgende zwei Figuren gekennzeichnet werden können.





Nun haben wir (nach Herrn Weierstrass) folgende kanonische Formen für Ω und Φ in den verschiedenen Kategorien I — VII:

$$\text{I}\begin{cases}\Omega = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{II}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_2) + x_1^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{III}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_3 + x_2^2 + x_4^2 + x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2x_1x_2 + \lambda_4 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{IV}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 + x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_2) + x_1^2 + \lambda_3(2x_3x_4) + x_3^2 + \lambda_5 x_5^2;\end{cases}$$

$$\text{V} \begin{cases} \Omega = \quad 2x_1x_4 + 2x_2x_3 \qquad\qquad + \quad x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_4 + 2x_2x_3) + 2x_1x_3 + x_2^2 + \lambda_5 x_5^2; \end{cases}$$

$$\text{VI} \begin{cases} \Omega = \quad x_1x_3 + x_2^2 \qquad\qquad + \quad 2x_1x_5, \\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_3 + x_2^2) + 2x_1x_2 + \lambda_4(2x_1x_5) + x_4^2; \end{cases}$$

$$\text{VII} \begin{cases} \Omega = \quad 2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2, \\ \Phi = \lambda_1(2x_1x_5 + 2x_2x_4 + x_3^2) + 2x_1x_4 + 2x_2x_3. \end{cases}$$

Diese kanonischen Formen beziehen sich allerdings ohne weiteres nur auf die Fälle in der Colonne *a*) unseres Schemas. Wir bekommen aber die kanonischen Formen für die in den anderen Colonnen stehenden Fälle, indem wir in der kanonischen Form des entsprechenden Falles *a*) die Wurzeln λ_i einfach in geeigneter Weise zusammenfallen lassen. So ist z. B. die kanonische Form für den Fall I *d*):

$$\begin{cases} \Omega = \quad x_1^2 + \quad x_2^2 + \quad x_3^2 + \quad x_4^2 + \quad x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_1 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 + \lambda_3 x_4^2 + \lambda_5 x_5^2. \end{cases}$$

Dass diese kanonischen Formen wirklich Formenschaaren liefern, welche zu dem betreffenden Falle gehören, sieht man sofort, wenn man die verschiedenen Discriminanten hinschreibt. Die Leistung von Herrn Weierstrass liegt nun darin, dass er bewiesen hat, dass jedes Formenpaar Ω, Φ auf die eine oder die andere dieser kanonischen Formen durch lineare Substitution gebracht werden kann *).

In jeder Kategorie I — VII sind also die Fälle *b*), *c*), *d*) . . . als Specialfälle von *a*) anzusehen. Es sind aber auch die Fälle II *a*), III *a*), . . . (und folglich die ganzen Kategorien II, III, . . .) als Specialfälle von I *a*) anzusehen; wie durch einen besonderen Grenzübergang (*K*) klar wird. Um diesen Grenzübergang auseinanderzusetzen, müssen wir als Ausgangspunkt eine etwas allgemeinere kanonische Form für I *a*) wählen wie die Weierstrassische, nämlich:

$$\text{A)} \quad \begin{cases} \Omega = \quad a_1x_1^2 + \quad a_2x_2^2 + \quad a_3x_3^2 + \quad a_4x_4^2 + \quad a_5x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1a_1x_1^2 + \lambda_2a_2x_2^2 + \lambda_3a_3x_3^2 + \lambda_4a_4x_4^2 + \lambda_5a_5x_5^2. \end{cases}$$

Um von hier aus zur Kategorie II überzugehen, machen wir die Substitution:

$$\lambda_2 \sim \lambda_1 + \varepsilon, \qquad x_2 \sim x_1 + \varepsilon x_2,$$

wo ε eine unendlich kleine Grösse erster Ordnung sein soll. Vernachlässigen wir unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung, so geht hierdurch das Formenpaar A) in folgendes über:

$$\begin{cases} \Omega = \quad (a_1 + a_2)x_1^2 + 2a_2\varepsilon x_1x_2 \qquad + \quad a_3x_3^2 + \quad a_4x_4^2 + \quad a_5x_5^2, \\ \Phi = \lambda_1(a_1 + a_2)x_1^2 + a_2\varepsilon(x_1^2 + 2\lambda_1x_1x_2) + \lambda_3a_3x_3^2 + \lambda_4a_4x_4^2 + \lambda_5a_5x_5^2. \end{cases}$$

*) Zugleich gelingt die Transformation in den Fällen *a*) im Wesentlichen nur auf eine Weise. In seiner Dissertation hat Herr Klein die Frage untersucht, wie oft die Transformation in den Fällen *b*) *c*) ... bewerkstelligt werden kann.



Wenn wir nun hier setzen:

$$a_1 + a_2 = 0 \qquad a_2 \varepsilon = 1 \qquad a_3 = a_4 = a_5 = 1$$

so bekommen wir gerade die Weierstrassische kanonische Form II a).

Um andererseits vom Formenpaar A) zum Falle III a) überzugehen, machen wir die Substitution:

$$\lambda_2 \sim \lambda_1 + \varepsilon, \qquad x_2 \sim x_1 + \varepsilon x_3,$$
$$\lambda_3 \sim \lambda_1 + \varepsilon', \qquad x_3 \sim x_1 + \varepsilon' x_2 + \eta x_3,$$

wo ε, ε' von der ersten, η von der zweiten Ordnung unendlich klein sein sollen. Wenn wir dann unendlich kleine Grössen dritter Ordnung vernachlässigen, und nachträglich setzen:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 0, \qquad a_2 \varepsilon^2 + a_3 \varepsilon'^2 = 1, \qquad a_4 = a_5 = 1,$$
$$a_2 \varepsilon + a_3 \varepsilon' = 0, \qquad a_3 \eta = 1,$$

so kommen wir in der That gerade auf die Weierstrassische kanonische Form III a).

Durch ähnliche Grenzübergänge können wir die weiteren kanonischen Formen herstellen; es wird nicht nöthig sein, dies hier anzuführen.

Schliesslich bemerken wir, dass abgesehen von dem Fall I g), der natürlich keine eigentliche geometrische Bedeutung hat, alle andere Fälle unseres Schemas wirkliche Cycliden liefern. Hiernach unterscheiden wir also im Ganzen 26 Arten von Cycliden.

§ 3. Anwendung der Elementartheilertheorie auf confocale Cyclidenschaaren. Betrachtung der Realitätsverhältnisse.

In § 1 haben wir unter Zugrundelegung eines pentasphärischen Coordinatensystems, für welches die Identität lautet:

$$\sum_1^5 {}_i\, a_i x_i^2 = 0,$$

die Gleichung der allgemeinen confocalen Cyclidenschaar in der Form mitgetheilt:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{a_i x_i^2}{\lambda - e_i} = 0.$$

Es soll in diesem Paragraphen unsere Aufgabe sein, die Ausartungen dieser Schaar zu untersuchen.

Zunächst bemerken wir, dass sämmtliche Flächen der durch unsere Formeln vorgestellten allgemeinen Schaar, abgesehen von den in der Schaar enthaltenen fünf doppeltzählenden Kugeln, Cycliden des Falles I a) des vorigen Paragraphen sind. Dementsprechend werden wir die Schaar selbst durch die Elementartheiler [11111] kennzeichnen dürfen.

Wenn wir nun zwei der e_i einander gleich setzen, werden alle Flächen der Schaar zum Falle I b) gehören, so dass wir sagen können, dass die Schaar selbst zu diesem Falle gehört. Auf diese Weise können wir durch blosses Gleichsetzen einiger e_i in der Gleichung der allgemeinen Schaar zu Schaaren übergehen, welche zu jedem der Fälle der Kategorie I gehören. In allen diesen Fällen können wir natürlich sämmtliche a_i gleich 1 nehmen, wenn wir wollen.

Es giebt aber auch Cyclidenschaaren, welche zu den Kategorien II — VII gehören und welche durch besondere Grenzübergänge (K) aus der allgemeinen Schaar abgeleitet werden können*). Diese Grenzübergänge sind genau dieselben, welche wir soeben für die einzelnen Cycliden besprochen haben, nur dass wir jetzt an Stelle von $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_5$ die Buchstaben $e_1, e_2, \ldots e_5$ setzen müssen. Die confocalen Cyclidenschaaren II a) und III a), welche wir auf diese Weise finden, lauten folgendermassen:

$$\text{II } a) \begin{cases} \Omega = 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ \Phi = \dfrac{x_1^2}{(\lambda - e_1)^2} + \dfrac{2x_1x_2}{\lambda - e_1} + \dfrac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \dfrac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \dfrac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0; \end{cases}$$

$$\text{III } a) \begin{cases} \Omega = 2x_1x_3 + x_2^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0, \\ \Phi = \dfrac{x_1^2}{(\lambda - e_1)^3} + \dfrac{2x_1x_2}{(\lambda - e_1)^2} + \dfrac{2x_1x_3 + x_2^2}{\lambda - e_1} + \dfrac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \dfrac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0. \end{cases}$$

Ganz ähnlich lauten die Gleichungen der Cyclidenschaaren IV a) — VII a). Wir bekommen dann weiter die verschiedenen Fälle b), c), . . . in jeder Kategorie durch blosse Gleichsetzung verschiedener e_i. —

Nun fragen wir uns: inwiefern hängt eine jede dieser confocalen Cyclidenschaaren von den Werthen der Constanten e_i wesentlich ab?

Um diese Frage zu beantworten, stellen wir zunächst folgenden wichtigen Satz auf:

Wenn man statt der Constanten e_i des allgemeinen confocalen Cyclidensystems irgend welche lineare Funktionen $\dfrac{\alpha e_i + \beta}{\gamma e_i + \delta}$ substituirt, so ändert sich das Flächensystem nicht, nur der Parameterwerth wird geändert, der den einzelnen Flächen beigelegt wird.

Dieser Satz lässt sich sofort durch einfache Umrechnung beweisen, indem wir in $\Phi = 0$ die Substitution machen:

$$e_i \sim \frac{\alpha e_i + \beta}{\gamma e_i + \delta}, \qquad \lambda \sim \frac{\alpha \lambda + \beta}{\gamma \lambda + \delta},$$

und die entstehende Gleichung vermöge $\Omega = 0$ reduciren.

*) Auf die Herstellung aller dieser Cyclidenschaaren nach einem gleichförmigen algebraischen Gesetze gehe ich der Kürze halber nicht ein; vergl. dazu die bereits genannte Abhandlung von Herrn Gino Loria.

Der soeben ausgesprochene Satz gilt aber im Sinne der Geometrie der reciproken Radien auch für die Kategorien II—VII, denn obwohl in einem solchen Falle nach der oben geschriebenen Substitution des λ und der e_i das Gleichungssystem $\Omega = 0$, $\Phi = 0$ nicht mehr absolut ungeändert bleibt, nimmt es seine ursprüngliche Form doch nach einer linearen Substitution der x_i wieder an; die confocale Flächenschaar ist also bei unserer Substitution im Sinne der Geometrie der reciproken Radien nicht geändert worden*). Wir kommen also auf den Satz:

Im Sinne der Geometrie der reciproken Radien hängt die einzelne confocale Cyclidenschaar einer beliebigen unserer 26 Arten nicht von den e_i selbst, sondern bloss von den Doppelverhältnissen der e_i ab.

Nun wird man aber in der mathematischen Physik nur solche Cyclidenschaaren als identisch ansehen wollen, welche mit einander reell kugelverwandt sind. Andererseits aber brauchen wir nur solche Schaaren zu betrachten, welche durchweg aus reellen Flächen bestehen; d. h. aus Flächen, deren Gleichungen in Cartesischen Coordinaten mit lauter reellen Coefficienten geschrieben werden können, (welche aber desshalb noch nicht alle reelle Punkte zu besitzen brauchen). Um auf unsere späteren physikalischen Fragen anwendbar zu sein, bedarf unsere Aufzählung also einer Modification in den hiermit bezeichneten zwei Hinsichten.

Nun stellt sich zunächst heraus, dass, sofern wir nur die reellen Cycliden der verschiedenen Schaaren betrachten wollen, wir uns auf reelle Werthe des Parameters λ beschränken können, und dass dann die e_i, sofern sie nicht reell sind, einander paarweise conjugirt maginär sein müssen. Wenn man nun das Trägheitsgesetz (S. 8) anwendet, findet man (*K*) folgendes Resultat:

Es gibt keine reellen Cycliden der Kategorien IV—VII. In den Kategorien II und III sind alle e_i für reelle Cycliden nothwendig reell. Dagegen spaltet sich die Kategorie I in zwei neue Kategorien I′ und I″, je nachdem alle e_i reell sind, oder nur drei von ihnen reell und die anderen zwei einander conjugirt imaginär.

Das Weierstrassische kanonische Coordinatensystem I′ besteht aus vier eintheiligen und einer nulltheiligen reellen Grundkugel; das Coordinatensystem I″ aus drei eintheiligen reellen und zwei imaginären Grundkugeln; die Coordinatensysteme II und III aus drei eintheiligen reellen Grundkugeln, und zwei reellen Punkt-Grundkugeln.

Uebrigens sind diese kanonischen Coordinatensysteme gerade diejenigen, welche wir auf S. 9 angegeben haben, bez. sind mit den dort angegebenen kugelverwandt.

*) Allerdings tritt eine Ausnahme ein, wenn durch die lineare Substitution der e_i eins derselben ins Unendliche geworfen wird, welches zu einem mehrfachen Elementartheiler gehört, denn dann müssten die x_i, um das im Texte bezeichnete Resultat zu erzielen, einer linearen Substitution mit unendlichen Coefficienten unterworfen werden. Es bedarf also hier stets eines besonderen Grenzüberganges.

§ 4. Aufzählung der reellen Systeme confocaler Cycliden.

Die Schlussbemerkungen des vorigen Paragraphen beziehen sich natürlich ebensogut, wie auf einzelne Cycliden, auf Cyclidensysteme. Wir sind also jetzt im Stande, die gewünschte Aufzählung der letzteren zu machen. Wie die verschiedenen hierbei in Betracht kommenden Schaaren sich gestaltlich verhalten, sehen wir am einfachsten dadurch, dass wir anstatt der pentasphärischen Coordinaten zunächst mittelst der Formeln von S. 9 Cartesische Coordinaten einführen, die besonderen so dargestellten Flächensysteme untersuchen und uns dann eine beliebige reelle Kugelverwandtschaft ausgeführt denken. Wir können auf diese Weise folgende Tabelle entwerfen, in welcher wir jeden Fall auf Grund der auf S. 13 getroffenen Verabredung mit einem Schema begleiten. Dabei sollen diese Schemata noch dadurch vervollständigt werden, dass wir den Strich, welcher der, bei der Kategorie I′ auftretenden, nulltheiligen Kugel entspricht, mit einer Pfeilspitze versehen. Wir werden nun diese Schemata geradezu als in der Ebene der complexen Zahlen λ gelegen ansehen. Jedem Punkte unserer horizontalen Mittellinie, als der Axe der reellen Zahlen, entspricht dann eine reelle Cyclide der Schaar, d. h. eine Cyclide mit reeller Gleichung. Diese Fläche kann dabei vielleicht nulltheilig sein, d. h. bis auf reelle singuläre Punkte oder Curven keine anderen reellen Punkte besitzen. Ich habe diejenigen Theile der reellen Axe, welchen solche nulltheilige Flächen entsprechen, in den Schemata nur punktirt.

Diejenigen reellen Flächen, welche (abgesehen von etwaigen isolirten Doppelpunkten) nur einen, durchaus zusammenhängenden, reellen Theil besitzen, bezeichnen wir als e i n t h e i l i g oder als r i n g f ö r m i g (je nachdem dieser reelle Theil im Sinne der gewöhnlich gebrauchten Ausdrucksweise der Analysis situs einfach oder dreifach zusammenhängend ist). Flächen, deren reeller Theil aus zwei getrennten Schaalen besteht, bezeichnen wir als z w e i t h e i l i g; eine jede dieser Schaalen ist dann nothwendig einfach zusammenhängend. Wenn die Fläche einen reellen nicht isolirten Doppelpunkt besitzt, so sind diese Bezeichnungen natürlich nicht ohne Weiteres anwendbar. Es kann aber eine solche Fläche immer auf zwei Weisen als Grenzfall einer singularitätenfreien Cyclide angesehen werden, und wir können dementsprechend zur Beschreibung ihrer Gestalt eine doppelte Bezeichnung (z. B. ein-zweitheilig) brauchen.

T a b e l l e.

$$\mathrm{I}\left\{\begin{aligned}\Omega &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,\\ \Phi &= \frac{x_1^2}{\lambda-e_1}+\frac{x_2^2}{\lambda-e_2}+\frac{x_3^2}{\lambda-e_3}+\frac{x_4^2}{\lambda-e_4}+\frac{x_5^2}{\lambda-e_5} = 0.\end{aligned}\right.$$

I a) [11111]

I′ a) [Schema: e_1 (Pfeil), e_2, e_3, e_4, e_5; ρ, ν, μ] μ, ρ = allgemeine zweitheilige Cycliden. ν = allgemeine Ringcycliden.

I″ a) [Schema: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5; ρ, ν, μ, ρ] μ, ν, ρ = allgemeine eintheilige Cycliden.

I b) [(11) 111]	I′ b_1)	ν = Ringcycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten. ρ = zweitheilige Cycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten.	ν = Rotations-ringcycliden. ρ = zweitheilige Rotationscycliden.
	I′ b_2)	μ, ρ = zweitheilige Cycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten.	μ ρ = zweitheilige Rotationscycliden.
	I′ b_3)	μ, ν = Cycliden mit zwei reellen Doppelpunkten.	μ, ν = Kegel zweiten Grades.
	I″ b)	μ, ρ = eintheilige Cycliden mit zwei conjugirt imaginären Doppelpunkten.	μ, ρ = eintheilige Rotationscycliden.
I c) [(111) 11]	I′ c_1)	ρ = Paare eintheiliger Kugeln mit nulltheiligem Grundkreis.	ρ = Paare eintheiliger concentrischer Kugeln.
	I′ c_2)	μ = Paare eintheiliger Kugeln mit eintheiligem Grundkreis.	μ = Ebenenpaare.
	I″ c)	ρ = Kugelpaare mit nulltheiligem Grundkreis, jedes aus einer ein- und einer nulltheiligen Kugel bestehend.	ρ = concentrische Kugelpaare, jedes aus einer ein- u. einer nulltheiligen Kugel bestehend.
I d) [(11)(11)1]	I′ d_1)	ν = Dupinsche Cycliden*) mit lauter imaginären Doppelpunkten.	(ν = Kreisringe.)
	I′ d_2)	ν = Dupinsche Cycliden mit zwei reellen Doppelpunkten.	ν = Rotationskegel.
I e) [(1111) 1]	I′ e_1)	Eine feste nulltheilige Doppelkugel.	
	I′ e_2)	Eine feste eintheilige Doppelkugel.	

*) Vergl. Anmerkung S. 4.

I f) [(111)(11)]

- I′ f_1) Ein Paar fester reeller Punktkugeln.
- I′ f_2) Ein fester eintheiliger Kreis.

$$\text{II}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,\\[4pt] \Phi = \dfrac{x_1^2}{(\lambda-e_1)^2} + \dfrac{2x_1x_2}{\lambda-e_1} + \dfrac{x_3^2}{\lambda-e_3} + \dfrac{x_4^2}{\lambda-e_4} + \dfrac{x_5^2}{\lambda-e_5} = 0.\end{cases}$$

II a) [2111]		μ = zwei-eintheilige Cycliden mit einem Doppelpunkt.	μ = zweischalige Hyperboloide.
		ν = eintheilig-ringförmige Cycliden mit einem Doppelpunkt.	ν = einschalige Hyperboloide.
		ρ = eintheilige Cycliden mit einem isolirten Doppelpunkt.	(ρ = Ellipsoide.)
II b) [2(11)1]	II b_1)	ν = eintheilig-ringförmige Cycliden mit zwei imaginären und einem reellen Doppelpunkt.	ν = einschalige Rotationshyperboloide.
		ρ = eintheilige Cycliden mit zwei imaginären und einem reellen isolirten Doppelpunkt.	ρ = abgeplattete Rotationsellipsoide.
	II b_2)	μ = zwei-eintheilige Cycliden mit zwei imaginären und einem reellen Doppelpunkt.	μ = zweischalige Rotationshyperboloide.
		ρ = eintheilige Cycliden mit zwei imaginären und einem reellen isolirten Doppelpunkt.	ρ = verlängerte Rotationsellipsoide.
II c) [2(111)]		ρ = eintheilige Kugeln mit einem nulltheiligen Grundkreis, mit jeder einzelnen Kugel ist die eine Punktkugel des Büschels zusammengeordnet.	ρ = eintheilige concentrische Kugeln, mit jeder Kugel ist die unendlich ferne Punktkugel zusammengeordnet.

II *d*) [(21)11]	μ = Cycliden mit einem, auf gewisse Weise specialisirten*) biplanaren Punkt mit reellen Tangentialebenen.	μ = hyperbolische Cylinder.
	ν = Cycliden mit einem, auf gewisse Weise specialisirten*) biplanaren Punkt mit imaginären Tangentialebenen.	ν = elliptische Cylinder.
II *e*) [(21)(11)]	ν = Cycliden mit zwei imaginären Doppelpunkten und mit einem auf gewisse Weise specialisirten*) biplanaren Punkt mit imaginären Tangentialebenen.	ν = Rotationscylinder.
II *f*) [(211) 1]	μ = Paare eintheiliger Kugeln, welche sich in einem, allen Paaren gemeinsamen Punkte berühren.	μ = Parallelebenen, paarweise zusammengehörend.
II *g*) [(2111)]	Eine feste doppelte Punktkugel.	

$$\text{III}\begin{cases}\Omega = 2x_1x_3 + x_2^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,\\ \Phi = \dfrac{x_1^2}{(\lambda-e_1)^3} + \dfrac{2x_1x_2}{(\lambda-e_1)^2} + \dfrac{2x_1x_3+x_2^2}{\lambda-e_1} + \dfrac{x_4^2}{\lambda-e_4} + \dfrac{x_5^2}{\lambda-e_5} = 0.\end{cases}$$

III *a*) [311]	ν, ρ = Cycliden mit einem biplanaren Punkt mit imaginären Tangentialebenen.	ν, ρ = elliptische Paraboloide.
	μ = Cycliden mit einem biplanaren Punkt mit reellen Tangentialebenen.	μ = hyperbolische Paraboloide.
III *b*) [3 (11)]	ν, ρ = Cycliden mit zwei imaginären Doppelpunkten, und mit einem biplanaren Punkte mit imaginären Tangentialebenen.	ν, ρ = Rotationsparaboloide.
III *c*) [(31) 1]	μ, ρ = Cycliden mit einem uniplanaren Punkte.	μ, ρ = parabolische Cyilnder.

*) Die im Texte nur angedeuteten Specialisirungen beziehen sich auf gewisse imaginäre Geraden, und brauchen hier nicht angegeben zu werden, da sie die Gestalt der Flächen in keiner Weise anschaulicher machen könnten.

III *d*) [(311)]		ρ = eintheilige, sich in einem Punkte berührende Kugeln, mit jeder Kugel ist der Berührungspunkt als Punktkugel zusammengeordnet.	(ρ = Parallelebenen, mit jeder Ebene ist die unendlich ferne Punktkugel zusammengeordnet.)

Zu dieser Tabelle fügen wir noch folgende Bemerkungen:

1) Wir haben in der Tabelle neben der Benennung der im allgemeinen auftretenden Flächen jedesmal die Benennung demselben Falle angehöriger besonders einfacher Flächen eingeklammert; aus diesen besonderen Flächen gehen die allgemeinen Flächen des Falles jeweils durch reelle Kugelverwandtschaft hervor.

2) Aus der Tabelle ergibt sich, dass es jedenfalls in den allgemeinen Fällen I′ *a*) und I″ *a*) beidemal drei wesentlich verschiedene Arten von eigentlichen (d. h. nicht imaginären oder nulltheiligen) Flächen gibt, welche wir bezüglich mit den Buchstaben μ, ν, ρ bezeichnet haben. Wenn man nun näher zusieht, findet man, dass die Flächen jeder dieser drei Arten den reellen Raum gerade einfach ausfüllen; wir werden also etwas ungenau von einer μ-Schaar, ν-Schaar und ρ-Schaar unserer Flächen sprechen dürfen. Sofern man nun nicht nur zwei Punkte e_i, sondern auch die zugehörigen Elementartheiler zusammenfallen lässt, bleibt die Anzahl dieser Schaaren eigentlicher Flächen, wie die Tabelle aufweist, ungeändert. Lässt man aber zwei e_i zusammenfallen, ohne dass es die zugehörigen Elementartheiler thun, so geht in dem verschwindenden Intervalle jedesmal eine der in Rede stehenden Schaaren eigentlicher Flächen verloren. Auf die Erklärung dieses Umstandes und die Ergänzung, die wir alsdann unserem Flächensystem hinzufügen müssen, gehen wir erst im nächsten Paragraphen näher ein. In der Tabelle haben wir diesen Umstand, bezw. die sogleich zu gebende Erläuterung, insofern berücksichtigt, dass wir immer einen der Buchstaben μ, ν, ρ zwischen die Striche des dem betreffenden Wurzelpunkte beigefügten Zeichens gesetzt haben. Es ist in dieser Hinsicht besonders zu bemerken, dass in den Fällen I *e*), I *f*), II *g*) in der hiermit angedeuteten Weise alle eigentlichen Flächenschaaren verschwunden sind, so dass allen nicht singulären Werthen von λ ein und dieselbe feste Fläche zugehört.

Schliesslich fassen wir einige der wichtigsten Ergebnisse der Tabelle folgendermassen zusammen:

Wenn eine Doppelwurzel (11) auftritt, bekommen die Flächen der Schaar zwei gemeinsame Doppelpunkte.

Wenn eine dreifache Wurzel (111) auftritt, bekommen die Flächen der Schaar einen gemeinsamen Doppelkreis, und arten also sämmtlich in Kugelpaare eines und desselben Kugelbüschels aus.

Wenn eine vierfache Wurzel (1111) auftritt, bekommen alle Cycliden der Schaar eine und dieselbe Doppelkugel, d. h. sie arten sämmtlich in diese eine doppelzählende Kugel aus.

Wenn eine mehrfache Wurzel eintritt, bei der nicht alle Elementartheiler einfach sind, bekommen alle Flächen der Schaar eine gemeinsame

Singularität, nämlich im Falle einer Doppelwurzel (2) einen gewöhnlichen Doppelpunkt, in allen anderen Fällen eine höhere Singularität (einen biplanaren Punkt etc.).

§ 5. Allgemeine cyclidische Coordinaten und deren Ausartungen.

Denken wir uns eine Cyclidenschaar I′ *a*) oder I″ *a*) zugrundegelegt, so gehen durch jeden Raumpunkt drei Flächen der Schaar, denn die Gleichung $\sum_1^5{}_i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$ ist, unter Berücksichtigung der Identität $\Sigma\, x_i^2 = 0$, vom dritten Grade in λ. Wir können also die Parameterwerthe der drei Cycliden, welche durch einen Punkt hindurchgehen, d. h. die Wurzeln dieser cubischen Gleichung, für den Punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ als cyclidische Coordinaten des Punktes ansehen.

Nun haben wir aber ferner im vorigen Paragraphen schon bemerkt, dass jede der drei eigentlichen Schaaren μ, ν, ρ den reellen Raum genau einmal erfüllt. Daraus schliessen wir, dass die cyclidischen Coordinaten eines reellen Raumpunktes reell sein werden, und beziehungsweise in den Intervallen μ, ν, ρ liegen müssen. Wir werden sie dementsprechend schlechtweg mit μ, ν, ρ bezeichnen.

Wir haben jetzt die pentasphärischen Coordinaten eines Punktes durch die cyclidischen auszudrücken. Ich will die betreffenden Formeln hier nicht begründen, sondern einfach mittheilen. Sei:

$$f(\lambda) = (\lambda - e_1)(\lambda - e_2) \ldots (\lambda - e_5),$$

so können wir die Formeln folgendermassen schreiben:

$$\sigma x_i^2 = \frac{(\mu - e_i)(\nu - e_i)(\rho - e_i)}{f'(e_i)},$$

wo σ ein Proportionalitätsfaktor ist, welcher sich folgendermassen bestimmen lässt:

$$1/\sigma = \sum_1^5{}_i\, e_i\, x_i^2.$$

Auf ganz dieselbe Weise können die dreifach orthogonalen Cyclidenschaaren II *a*) und III *a*) zur Definition specieller cyclidischer Coordinaten benutzt werden, welche dann mit den pentasphärischen Coordinaten durch Formeln verbunden sind, die aus den soeben gegebenen Formeln des allgemeinen Falles durch die Grenzübergänge von S. 14—15 abgeleitet werden können.

Anders ist es zunächst mit den übrigen Cyclidenschaaren, welche wir im vorigen Paragraphen aufgezählt haben, indem diese ja den Raum nur zwei- oder gar nur einfach ausfüllen, und also nicht ohne Weiteres zur Definition krummliniger Coordinaten gebraucht werden können. Wenn wir inzwischen den Grenzübergang von den allgemeinen Fällen I *a*),

II a), III a) zu den in Rede stehenden weiter ausgearteten Fällen b), c), . . . näher betrachten, sehen wir, dass dennoch in jedem Falle indirect krummlinige Coordinaten definirt werden können. Während nämlich beim Grenzübergange eine oder zwei der ursprünglichen Flächenschaaren μ, ν, ρ in die Flächenschaaren übergehen, welche durch die kanonische Gleichungsform dargestellt werden, gehen die anderen (oder die andere) Flächenschaar nicht einfach verloren, sondern arten in ganz bestimmter Weise in ein anderes Flächensystem aus, das nun mit der kanonischen Gleichung genommen, nach wie vor ein dreifaches Orthogonalsystem definirt, welches sich nur insofern von dem Orthogonalsystem des allgemeinen Falles unterscheidet, als es nicht durch eine einzige Gleichung darstellbar ist.

Fassen wir, um dies näher zu erläutern, zunächst den Fall ins Auge, wo zwei einfache Punkte e_i, e_j in einen Doppelpunkt (11) zusammenrücken. Ehe die Punkte zusammengefallen sind, wird es eine eigentliche Flächenschaar geben, die entweder dem verschwindenden Intervalle selbst entspricht oder doch einem Intervalle, welches an dieses verschwindende Intervall angrenzt. Im ersten Falle sehen wir ohne Weiteres, dass die Parameterwerthe, welche den Flächen der in Betracht kommenden Flächenschaar entsprechen, sich in der Grenze in dem zweifachen Punkte selbst zusammendrängen; im zweiten Falle (d. h. wo im verschwindenden Intervalle eine nulltheilige Flächenschaar liegt) wird Aehnliches statt finden, nur werden sich jetzt die Parameterwerthe der in Betracht kommenden reellen Schaar unmittelbar ausserhalb des verschwindenden Intervalles zusammenhäufen. Beidemal ist also der Parameter λ nicht mehr zur Festlegung der einzelnen Flächen der Schaar zu gebrauchen. Wir müssen vielmehr zu diesem Zwecke einen neuen Parameter λ' einführen, indem wir, unter ε eine unendlich kleine Grösse verstanden, folgenden Grenzübergang machen:

$$e_j = e_i + \varepsilon, \qquad \lambda = e_i + \varepsilon\lambda'.$$

Hierdurch geht aber die allgemeine Gleichung I a), oder II a), bez. III a) über in:

$$\frac{x_i^2}{\lambda'} + \frac{x_j^2}{\lambda'-1} = 0,$$

und dies also ist die Flächenschaar, welche bei unmittelbarer Specialisirung der kanonischen Gleichungsform in der Nähe des Punktes e_i verloren gegangen war. Diese Gleichung stellt aber offenbar einen Kugelbüschel dar, welcher, wenn die Kugeln x_i und x_j beide eintheilig sind, einen eintheiligen Grundkreis besitzt, wenn aber eine von ihnen nulltheilig ist, einen nulltheiligen Grundkreis*). So bekommen wir z. B. als Ergänzung des zweifach orthogonalen Systems von Rotationscycliden I$'b_1$) den Büschel ihrer Meridianebenen; als Ergänzung

*) Jenachdem der erste oder der zweite dieser Fälle vorliegt, haben wir es bei der zutretenden Schaar geradezu mit dem Falle I$'c_2$) oder I$'c_1$) des allgemeinen Schemas zu thun, nicht nur was die Flächenschaar als solche angeht, sondern auch mit Rücksicht auf die Einführung des Parameters λ' bezw. λ, der zur Darstellung der einzelnen Flächen der Schaar dient. Es erscheint nur die Lage der Punkte e_i beim Gebrauch von λ' insofern specialisirt, als die zwei einfachen Wurzeln den Parameterwerthen 0, 1, die dreifache dem Parameterwerthe ∞ zugewiesen sind.

der Kegel zweiten Grades I′ b_3) den Büschel der um ihre gemeinsame Spitze als Mittelpunkt herumgelegten concentrischen Kugeln.

Den so gewonnenen Parameter λ' (welchen wir übrigens je nach den Umständen als μ', ν' oder ρ' bezeichnen werden) wollen wir nun neben den beiden von der kanonischen Gleichungsform unmittelbar gelieferten Parametern als dritte krummlinige Coordinate einführen (wobei zu bemerken ist, dass jedem Werthe von λ' zwei Kugeln des Büschels entsprechen, die zusammengenommen aus einer Cyclide des allgemeinen Falles entstanden sind).

Auf diese Weise bekommen wir zunächst in den Fällen I *b*), I *d*), II *b*), III *b*) wohldefinirte krummlinige Coordinatensysteme.

In ganz ähnlicher Weise verfahren wir jetzt, wenn ein dreifacher Punkt (21) oder ein vierfacher Punkt (31) auftritt.

Fällt nämlich zunächst ein Doppelpunkt (2) e_1 mit einem einfachen Punkt e_3 zusammen, so machen wir in II *a*) die Substitution:

$$e_3 = e_1 + \varepsilon \qquad\qquad \lambda = e_1 + \varepsilon + \varepsilon^2 \lambda'$$

und nehmen dann ε unendlich klein. Hierdurch erhalten wir aus II *a*:

$$x_1^2 + \frac{x_3^2}{\lambda'} = 0,$$

d. h. eine Gleichung, welche einen Büschel sich in einem Punkte berührender Kugeln darstellt (d. h. die Inverse eines Systems von Parallelebenen).

Ganz entsprechend verfahren wir, wenn ein dreifacher Punkt (3) e_1 mit einem einfachen Punkt e_4 zusammenfällt. Wir setzen dann:

$$e_4 = e_1 + \varepsilon, \qquad\qquad \lambda = e_1 + \varepsilon + \varepsilon^3 \lambda'$$

und bekommen aus III *a*:

$$x_1^2 + \frac{x_4^2}{\lambda'} = 0\,^{*}),$$

so dass auch hier die ergänzende Flächenschaar wieder ein Büschel sich in einem Punkte berührender Kugeln ist.

Beidemal führen wir natürlich den Parameter λ' als dritte krummlinige Coordinate ein.

Hiermit haben wir nun alle Fälle discutirt, bei welchen solche mehrfache Wurzeln auftreten, die zu zwei verschiedenen Elementartheilern gehören; und wir haben gesehen, dass in der Nähe jedes solchen Punktes durch Grenzübergang ein bestimmter Kugelbüschel als Ergänzung des sonst unvollständigen Orthogonalsystems gefunden werden kann. Wenn

---

*) Dies ist von anderer Seite wieder die Gleichung einer in unserem kanonischen Schema an späterer Stelle aufgeführten Flächenschaar, nämlich der Flächenschaar II *f*), wobei insbesondere $e_1 = \infty$, $e_3 = 0$ gesetzt ist. (Vergl. Bemerkung S. 17).

dagegen mehrfache Wurzeln auftreten, welche drei oder vier verschiedenen Elementartheilern entsprechen, so sind in der Nähe der entsprechenden Punkte e_i zwei bezw. drei Flächenschaaren zu suchen, die natürlich im allgemeinen keine Kugelbüschel sein werden. Den betreffenden Grenzübergang können wir dann immer auf mehrere verschiedene Weisen machen. Hierauf wollen wir aber an gegenwärtiger Stelle nicht näher eingehen. In der That überzeugt man sich leicht, dass man dabei, von einer einzigen sofort zu nennenden Ausnahme abgesehen, kein neues dreifach orthogonales System bekommen kann, das uns nicht schon von anderer Seite bekannt wäre, und folglich auch kein wesentlich neues krummliniges Coordinatensystem. Wenn wir beispielsweise den Kugelbüschel I' c_2) durch das Cyclidensystem I' b_1) zu einem dreifachen Orthogonalsystem ergänzen, so bekommen wir dasselbe Orthogonalsystem, wie soeben, als wir I' b_1) durch I' c_2) ergänzten.

Bei dieser Auseinandersetzung sind unter allen für uns in Betracht kommenden Orthogonalsystemen nur diejenigen unberücksichtigt geblieben, welche aus lauter Kugelbüscheln bestehen. Man sieht mit leichter Mühe, dass es im Sinne der Geometrie der reciproken Radien nur ein solches System gibt, nämlich dasjenige, bei dem die Grundkreise aller drei Kugelbüschel blosse Punkte sind, d. h. dasjenige System, welches aus drei zu einander orthogonalen Schaaren von Parallelebenen durch Inversion hervorgeht. Dieses Flächensystem könnten wir durch Grenzübergang sowohl aus dem Falle II f) als aus dem Falle III d) ableiten, und hierdurch gleich ein zugehöriges Coordinatensystem aufstellen. Beidemal würde aber einer der drei Kugelbüschel bevorzugt werden, während sie geometrisch alle drei völlig gleichberechtigt sind.

Wir ziehen es also vor, das in Rede stehende dreifache Kugelsystem aus einem beliebigen anderen dreifach orthogonalen Cyclidensystem (etwa aus dem System II a) der confocalen Flächen zweiter Ordnung) dadurch abzuleiten, dass wir letzteres von einem beliebigen nicht singulären Raumpunkte aus, einer Aehnlichkeitstransformation mit unendlich grossem Index unterwerfen, und das so entstehende System orthogonaler Parallelebenen beliebig invertiren.

Diesen Gedanken führen wir folgendermassen analytisch durch. Wir legen das dritte Coordinatensystem von S. 9 zu Grunde. Nun wird für dieses Coordinatensystem eine vom Nullpunkte ausgehende Aehnlichkeitstransformation vom Index a durch die Substitution ausgedrückt:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \sim (a x_1, \frac{x_2}{a}, x_3, x_4, x_5).$$

Vermöge dieser Substitution geht das System II a) über in:

$$\frac{a^2 x_1^2}{(\lambda - e_1)^2} + \frac{2 x_1 x_2}{\lambda - e_1} + \frac{x_3^2}{\lambda - e_3} + \frac{x_4^2}{\lambda - e_4} + \frac{x_5^2}{\lambda - e_5} = 0.$$

Setzen wir nun der Reihe nach:

$$\lambda = e_3 + \varepsilon_3 \rho', \quad \lambda = e_4 + \varepsilon_4 \nu', \quad \lambda = e_5 + \varepsilon_5 \mu',$$

unter ε_3, ε_4, ε_5 unendlich kleine Grössen verstanden, und lassen wir zugleich a in der

Weise unendlich werden, dass:

$$\frac{a^2 \varepsilon_3}{(e_3 - e_1)^2} = 1, \qquad \frac{a^2 \varepsilon_4}{(e_4 - e_1)^2} = 1, \qquad \frac{a^2 \varepsilon_5}{(e_5 - e_1)^2} = 1,$$

so bekommen wir die drei Systeme von Parallelebenen:

$$x_1^2 + \frac{x_3^2}{\rho'} = 0, \qquad x_1^2 + \frac{x_4^2}{\nu'} = 0, \qquad x_1^2 + \frac{x_5^2}{\mu'} = 0\,*).$$

Wenn nun x_1 nicht gerade die unendlich ferne Punktkugel bedeutet (wie wir zunächst voraussetzten), und dementsprechend x_3, x_4, x_5 gleich Null gesetzt, nicht Ebenen, sondern eintheilige Kugeln geben, so werden diese drei Gleichungen das allgemeine System dreier orthogonaler Kugelbüschel darstellen. Eben die hier auftretenden Parameter μ', ν', ρ' werden wir natürlich als die zugehörigen krummlinigen Coordinaten in Anwendung bringen.

*) Auch hier gilt die Bemerkung von S. 25.

Kapitel II.

Allgemeine analytische Erläuterungen über die Lamésche Gleichung und deren Auftreten in der Potentialtheorie auf Grund der besprochenen krummlinigen Coordinatensysteme.

Nachdem wir im vorigen Kapitel diejenigen Systeme krummliniger Coordinaten eingeführt haben, welche wir bei der Behandlung unseres Potentialproblems später gebrauchen werden, wollen wir uns jetzt zur Frage wenden, wie dieselben in der Potentialtheorie überhaupt zu verwerthen sind. Auf diese Frage gehen wir in den drei letzten Paragraphen dieses Kapitels näher ein, zunächst müssen wir uns aber mit einer Gattung gewöhnlicher Differentialgleichungen beschäftigen, nämlich den Laméschen Gleichungen, mit welchen wir später vertraut sein müssen. Wir schicken also zunächst einige allgemeinen auf diese Gleichungen bezüglichen Erörterungen voraus.

§ 1. Ueber die singulären Punkte linearer Differentialgleichungen.

Die Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen zwischen zwei Variablen ist in den letzten Jahrzehnten bekanntlich Gegenstand zahlreicher funktionentheoretischer Untersuchungen geworden, welche auf Riemann zurückgehen (1857)*) und immer noch nicht als abgeschlossen zu gelten haben. Wir brauchen hiervon zunächst nur einen speciellen Punkt, den Herr Fuchs 1865 erledigt hat**), über den ich nunmehr in diesem Paragraphen referiren will. Wir werden uns dabei der Kürze halber um so lieber auf Gleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p\frac{dy}{dx} + qy = 0$$

*) „Beiträge zur Theorie der durch die Gaussische hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen" Ges. Werke S. 62. Vergl. auch ges. Werke S. 357.

**) „Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten." Crelle Bd. 66.

mit rationalen Coefficienten p, q beschränken, als wir keine allgemeineren Gleichungen gebrauchen werden.

Man nennt diejenigen Punkte der complexen x-Ebene, in denen p oder q unendlich wird, die singulären Punkte der Differentialgleichung. Bekanntlich wurde schon von Cauchy bewiesen, dass in dem Bereiche eines jeden nicht singulären Punktes x_0 zwei linear unabhängige Lösungen y_1 und y_2 der Differentialgleichung existiren, welche sich in Potenzreihen folgender Form entwickeln lassen:

$$\begin{aligned} y_1 &= \qquad\quad (x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + A_3(x-x_0)^3 + \ldots, \\ y_2 &= 1 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)^2 + B_3(x-x_0)^3 + \ldots. \end{aligned}$$

Aus diesen zwei Zweigen lässt sich dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung in folgender Form zusammensetzen:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2,$$

wo c_1 und c_2 beliebige Constanten sind.

Nun unterscheidet Herr Fuchs*) ferner zwischen regulären und irregulären singulären Punkten.

In der Nähe eines regulären Punktes x_0 gibt es im allgemeinen zwei linear unabhängige Lösungen, welche sich folgendermassen entwickeln lassen:

$$\begin{aligned} y_1 &= (x-x_0)^{k'} \; [1 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots], \\ y_2 &= (x-x_0)^{k''} \; [1 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)^2 + \ldots]. \end{aligned}$$

Ist dies der Fall, so heissen k' und k'' die Exponenten des Punktes x_0 (so dass insbesondere ein nicht singulärer Punkt als regulärer Punkt mit den Exponenten 0, 1 angesehen werden kann). Wenn aber die Differenz $k'-k''$ eine ganze Zahl ist, werden wir im allgemeinen nicht mehr zwei Lösungen der gerade hingeschriebenen Form haben, vielmehr wird eine logarithmische Irrationalität hinzukommen, in der Art, dass wir schreiben müssen:

$$\begin{aligned} y_1 &= (x-x_0)^{k'} \; [1 + A_1(x-x_0) + A_2(x-x_0)^2 + \ldots], \\ y_2 &= (x-x_0)^{k''} [1 + B_1(x-x_0) + B_2(x-x_0)^2 + \ldots] + C y_1 . \log(x-x_0). \end{aligned}$$

Unter gewissen Umständen aber, die wir hier nicht genauer charakterisiren können, fällt, wie im allgemeinen Falle, wo $k'-k''$ keine ganze Zahl ist, dieses logarithmische Glied weg**).

---

*) Die Bezeichnung stammt allerdings von Herrn Frobenius her.

**) Ob dies der Fall ist oder nicht, unterscheidet man, im Falle $k'-k'' = 1$ ist, am einfachsten dadurch, dass man zusieht ob die Differentialgleichung dritter Ordnung, welcher der Quotient y_1/y_2 genügt, im Punkte x_0 einen singulären Punkt besitzt oder nicht. Ueber diese Differentialgleichung vergl. die Abhandlung von Herrn Schwarz über die hypergeometrische Reihe, Crelle Bd. 75, Ges. Werke Bd. II, p. 211 (1872). Ich werde einen Punkt mit $k'-k'' = 1$, bei welchem kein logarithmisches Glied auftritt, später einen uneigentlich singulären Punkt nennen.

Existiren in der Nähe eines singulären Punktes x_0 keine zwei linear unabhängigen Lösungen, welche sich in der einen oder der anderen der angegebenen Formen entwickeln lassen, so heisst dieser Punkt irregulär.

Nun ist es die besondere Leistung von Herrn Fuchs gewesen, die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt zu haben, dass ein singulärer Punkt der vorgelegten Differentialgleichung x_0 regulär sein soll. Dieselbe besteht einfach darin, dass die beiden Grenzwerthe:

$$1)\quad \text{limes}\ [p\,.\,(x-x_0)]_{x=x_0}$$
$$2)\quad \text{limes}\ [q\,.\,(x-x_0)^2]_{x=x_0}$$

nicht unendlich sein sollen.

Was wir bis jetzt gesagt haben, bezieht sich zunächst nur auf endliche Werthe der Variablen x. Inzwischen wird man die ganze Entwickelung in leichter Weise auf den Punkt $x=\infty$ ausdehnen. Um nämlich über den Punkt $x=\infty$ etwas zu erfahren, werden wir die Hülfsvariable $x'=1/x$ in die Differentialgleichung einführen und dann die Natur des Punktes $x'=0$ nach den soeben gegebenen Regeln untersuchen. —

Nach diesen Vorbemerkungen stellen wir folgenden leicht zu begründenden Satz auf:

Die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{1-k_1'-k_1''}{x-e_1}+\frac{1-k_2'-k_2''}{x-e_2}+\cdots+\frac{1-k_n'-k_n''}{x-e_n}\right)\frac{dy}{dx}$$
$$+\frac{y}{(x-e_1)(x-e_2)\ldots(x-e_n)}\left[\frac{k_1'k_1''(e_1-e_2)(e_1-e_3)\ldots(e_1-e_n)}{x-e_1}+\cdots+\frac{k_n'k_n''(e_n-e_1)\ldots(e_n-e_{n-1})}{x-e_n}+\underset{n-2}{G}(x)\right]y=0,$$

in welcher $G(x)$ eine beliebige ganze rationale Funktion $(n-2)$-ten Grades bedeutet, ist die allgemeinste homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, welche sich überall regulär verhält und im Endlichen nur die singulären Punkte $e_1, e_2, \ldots e_n$ besitzt, in denen sie die Exponentenpaaren k_1', k_1''; k_2', k_2''; ... k_n', k_n'' aufweist.

Dabei wird natürlich im allgemeinen der Punkt $x=\infty$ ein singulärer Punkt dieser Differentialgleichung sein. Als Exponenten desselben findet man die Wurzeln der quadratischen Gleichung:

$$k^2+(1-n+k_1'+k_1''+k_2'+k_2''+\cdots+k_n'+k_n'')k+c_{n-2}=0$$

(wo c_{n-2} den (willkürlichen) Coefficienten der höchsten in $G_{n-2}(x)$ auftretenden Potenz von x, d. h. von x^{n-2} bedeutet). Wir erkennen insbesondere, dass die Summe der in Rede stehenden Exponenten durch die Exponenten der im Endlichen gelegenen singulären Punkte schon völlig bestimmt ist. Dagegen können wir offenbar durch passende Festlegung von c_{n-2} einer beliebigen anderen linearen Verbindung dieser Exponenten, etwa ihre Differenz, einen beliebigen Werth ertheilen. Es werden aber dann noch immer $n-2$ Constanten in $G_{n-2}(x)$ und also in der Differentialgleichung willkürlich bleiben.



§ 2. Allgemeine Definition der Laméschen Gleichung. Einführung homogener Variablen.

Die Differentialgleichung, welche von Lamé selbst in die Analysis eingeführt ist, und dementsprechend in engerem Sinne seinen Namen trägt, lässt sich nach dem Voraufgehenden sehr einfach charakterisiren. Wir können sie nämlich in folgender Gestalt schreiben*):

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-e_1} + \frac{1}{x-e_2} + \frac{1}{x-e_3}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{Ax+B}{4(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)} \cdot y.$$

Diese Gleichung hat als singuläre Stellen die Punkte e_1, e_2, e_3, ∞, von denen jeder der drei ersten die Exponenten 0, $\frac{1}{2}$ besitzt, während der Punkt ∞ die Exponenten $\frac{1 \pm \sqrt{1+4A}}{4}$ aufweist. Die Constanten A und B dieser Gleichung werden nun von Lamé noch auf ganz bestimmte Weise ausgewählt. Inzwischen werden wir diese Specialisirung hier fallen lassen, und führen damit also eine erste Verallgemeinerung für die Bedeutung des Wortes »Lamésche Gleichung« ein.

In der mitgetheilten Gleichung lassen wir jetzt zwei der singulären Punkte e_1, e_2, e_3 zusammenfallen. Man sieht dann mit leichter Mühe, dass die Exponenten des so entstehenden singulären Punktes nicht mehr die einfachen Werthe 0, $\frac{1}{2}$ haben, sondern allgemeinere Werthe, welche von den Constanten A und B der Differentialgleichung abhängen. Nun bemerkten wir aber schon, dass die Exponenten des Punktes ∞ ebenfalls von der Constante A abhängen, und es liegt hiernach nahe zu vermuthen, dass die gewöhnliche Lamésche Gleichung aus einer Gleichung abgeleitet werden kann, welche fünf singuläre Punkte mit den Exponenten 0, $\frac{1}{2}$ im Endlichen, im Unendlichen aber nur einen uneigentlich singulären Punkt besitzt, nämlich so, dass wir zwei dieser Punkte im Unendlichen zusammenfallen lassen. Da dies in der That der Fall ist, wie wir im folgenden Paragraphen sehen werden, werden wir den Namen Lamésche Gleichung auf diese allgemeinere Gleichung mit fünf singulären Punkten im Endlichen übertragen. Indem wir nun diese Gleichung noch in ähnlicher Weise erweitern, wie dies Heine gegenüber der ursprünglichen Laméschen Gleichung gethan hat, indem wir also statt der fünf singulären Punkte mit den Exponenten 0, $\frac{1}{2}$ deren beliebig viele zulassen, können wir schliesslich folgende allgemeine Definition aussprechen:

*) Dies ist allerdings nicht genau die Gestalt, in welcher diese Gleichung zumeist in der Literatur auftritt. Um von unserer Form zu der gewöhnlich gebrauchten überzugehen, müssen wir einen der Punkte e_1, e_2, e_3 in den Nullpunkt legen, und dann die quadratische Transformation $x \sim x^2$ machen. Diese Transformation verwischt aber den wahren Charakter der Differentialgleichung, auf den es weiterhin ankommt, insofern sie einen der drei gleichberechtigten singulären Punkte zu einem nicht singulären Punkte macht, und die anderen zwei verdoppelt (ganz ähnlich wie dies mit den Verzweigungspunkten bei der Legendreschen Normalform der elliptischen Integrale geschieht).

Mit dem Namen *Lamésche Gleichung* bezeichnen wir eine überall reguläre homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit rationalen Coefficienten, deren im Endlichen gelegene singuläre Punkte $e_1, e_2, \ldots e_n$ sämmtlich die Exponenten $0, \frac{1}{2}$ besitzen, und die im Unendlichen nur einen uneigentlich singulären Punkt aufweist. Jede Lösung einer Laméschen Gleichung soll eine Lamésche Funktion heissen*).

Um nun die allgemeine so definirte Lamésche Gleichung aufzustellen, haben wir in die Gleichung von S. 30 vor allen Dingen zu setzen:

$$k_1' = k_2' = \ldots = k_n' = 0, \qquad c_{n-2} = \frac{n(n-4)}{16}.$$
$$k_1'' = k_2'' = \ldots = k_n'' = \tfrac{1}{2},$$

Die beiden Exponenten des Punktes $x = \infty$ werden in Folge dessen:

$$\frac{n}{4} \text{ und } \frac{n-4}{4}.$$

Hierüber hinaus müssen wir nun noch die Forderung befriedigen, dass im Punkte $x = \infty$ keine logarithmische Irrationalität auftreten soll. Durch die auf S. 29 angedeutete Methode findet man, dass man zu dem Zwecke

$$c_{n-3} = \frac{-(n-2)(n-4)}{16}(e_1 + e_2 + \cdots + e_n)$$

nehmen muss, unter c_{n-3} der Coefficient von x^{n-3} in $\underset{n-2}{G}(x)$ verstanden. Setzen wir nun noch der Kürze halber:

$$f(x) = (x-e_1)(x-e_2)\ldots(x-e_n),$$

so können wir die allgemeine Lamésche Gleichung in folgender Form schreiben:

$$1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{f'(x)}{2f(x)} \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{4f(x)}\left[\frac{-n(n-4)}{4}x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-4)}{4}\sum_1^n e_i \cdot x^{n-3} + A^{n-4} + \cdots + M\right] y = 0,$$

oder nach einer kleinen formalen Umänderung:

$$2) \qquad 4f(x)\frac{d^2y}{dx^2} + 2f'(x) \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{n-4}{4(n-1)}f''(x) \cdot y = (ax^{n-4} + bx^{n-5} + \cdots + m) \cdot y.$$

---

*) Diese Definition stimmt, wie wir sofort sehen werden, im Wesen der Sache mit derjenigen überein, welche Herr Klein in seiner Vorlesung gegeben hat (vergl. auch Gött. Nachr. März 1890, sowie Math. Annalen Bd. 38). Was die Beziehung zu Heine angeht, so kann man unsere Lamésche Gleichung offenbar als Specialfall einer Gleichung von der Ordnung $(n-1)$ ansehen. Entsprechend dem soeben angedeuteten Grenzübergange ziehen wir aber vor, dieselbe vielmehr als eine Verallgemeinerung seiner Gleichung von der Ordnung $n-3$ zu betrachten. Vergl. unten S. 35.

Zwei andere wichtige Formen unserer Laméschen Gleichung bekommen wir, wenn wir das hyperelliptische Integral:

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{f(x)}}$$

einführen; dieselben lauten:

3) $$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-n(n-4)}{4} x^{n-2} + \frac{(n-2)(n-4)}{4} \left(\sum_1^n e_i\right) . x^{n-3} + A x^{n-4} + \cdots + M\right] y,$$

4) $$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-(n-4)}{4(n-1)} f''(x) + a x^{n-4} + b x^{n-5} + \cdots + m\right] y.$$

Man bemerke, dass ausser der Zahl n und den Argumenten $e_1, e_2, \ldots e_n$ der singulären Punkte, noch in jeder der Formen 1)—4) $(n-3)$ willkürliche Constanten auftreten. Diese Constanten wollen wir mit Herrn Klein die accessorischen Parameter der Laméschen Gleichung nennen. Wir deuteten bereits an, dass wir später die singulären Punkte $e_1 \ldots e_n$ zum Theil zusammenrücken lassen wollen. Indem wir die dann entstehenden singulären Punkte als solche von höherer Multiplicität bezeichnen werden, benennen wir die $e_1 \ldots e_n$ selbst als einfache singuläre Punkte. Den Punkt $x = \infty$ bezeichneten wir bereits als uneigentlich singulären Punkt. In der That kann man die Singularität des letzteren durch Einführung homogener Variablen ganz wegschaffen, wie wir jetzt sehen werden, wodurch wir dann diejenige Normalform der Laméschen Gleichung erhalten werden, welche Herr Klein a. d. a. O. zu Grunde legt.

Wir hatten im Punkte $x = \infty$ die beiden Exponenten

$$\frac{n-4}{4} \text{ und } \frac{n}{4}.$$

Schreiben wir jetzt, homogen machend:

$$x = \frac{x_1}{x_2},$$

so werden wir diese Exponenten offenbar auf 0 und 1 reduciren (und damit eben die ganze Singularität des Punktes $x = \infty$ aufheben), indem wir an Stelle der Funktion y, die unserer Differentialgleichung genügt, die Form

$$F(x_1, x_2) = x_2^{\frac{4-n}{4}} . y$$

einführen. Die so entstehenden Formen $F(x_1, x_2)$ werden kurzweg als Lamésche Formen zu bezeichnen sein. Sie genügen einer Differentialgleichung, welche nur mehr bei $e_1 \ldots e_n$ singuläre Punkte besitzt und in ihnen gleichförmig die Exponenten 0, $\frac{1}{2}$ aufweist. Um dieselbe aufzustellen, knüpft man am besten an die vorstehend unter 2) mitgetheilte Gleichung an. Indem man in dieselbe statt y F einführt, erhält man nach einfacher Umrechnung mittelst des Eulerschen Theorems über homogene Funktionen:

$$\frac{\partial^2 f}{dx_2^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}-2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\cdot\partial x_2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_1\cdot\partial x_2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}=\frac{n(n-1)}{4}(ax_1^{n-4}+bx_1^{n-5}x_2+\cdots+mx_2^{n-4})\cdot F.$$

Der hier linkerhand auftretende Differentialausdruck ist die in der Formentheorie wohlbekannte zweite Ueberschiebung der Formen f und F (unter f natürlich die Form $(x_1-e_1x_2)(x_1-e_2x_2)\ldots(x_1-e_nx_2)$ verstanden). Wir wollen sie der Kürze halber mit $(f, F)_2$ bezeichnen. Wenn wir nun noch durch φ_{n-4} eine beliebige ganze rationale binäre Form $(n-4)$-ter Dimension bezeichnen, können wir die vorstehende Differentialgleichung offenbar in folgender eleganter Weise schreiben:

5) $$(f_n,\ F_{\frac{4-n}{4}})_2=\varphi_{n-4}\cdot F_{\frac{4-n}{4}},$$

und eben dieses ist die Kleinsche Normalform*).

Da wir nun im Folgenden den Werth $x=\infty$ in keiner Weise werden auszeichnen wollen, wären es eigentlich die Laméschen Formen, welche wir unseren weiteren Entwickelungen zu Grunde legen sollten. Trotzdem werden wir, um nicht zu sehr von der gewöhnlichen Darstellungsweise abzuweichen, im Folgenden an den Laméschen Funktionen festhalten. Da müssten wir denn eigentlich bei jedem Schritte den Werth $x=\infty$ für sich betrachten, und jeden Satz mit einem auf diesen Werth bezüglichen Supplementarsatz begleiten. Indessen werden wir diese ergänzenden Betrachtungen zumeist nicht durchführen, sondern dem Leser überlassen, indem wir voraussetzen, dass die Intervalle der x-Axe, welche wir später zu betrachten haben, den Punkt $x=\infty$ nicht enthalten, was man in jedem Falle durch eine geschickte Wahl der Grösse x erreichen kann.

Ehe wir diesen Paragraphen schliessen, wollen wir noch kurz den einfachsten Fall unserer Laméschen Gleichung besprechen, nämlich den Fall, wo $n=4$ ist. Hier bemerken wir zunächst, dass der Unterschied zwischen Laméschen Funktionen und Formen in Wegfall kommt (einfach weil $n-4=0$), — dann aber zweitens, dass die Laméschen Funktionen dieses Falles in einfachster Weise durch elliptische Integrale ausgedrückt werden können. Gleichung 3) oder 4) S. 33 nimmt nämlich hier die Form an:

$$\frac{d^2y}{dt^2}=ay$$

wo t das elliptische Integral ist,

$$t=\int\frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)}},$$

und wir finden als deren allgemeine Lösung:

$$y=L\sin(\sqrt{-a}\cdot t)+M\cos(\sqrt{-a}\cdot t).$$

---

*) Man vergl. auch die Picksche Normalform gewisser Differentialgleichungen; Math. Ann. Bd. 38 S. 139—143.

§ 3. Ueber die Specialfälle und die Ausartungen der Laméschen Gleichung.

Was wird nun aus der Laméschen Gleichung, wenn zwei einfache singuläre Punkte desselben zusammenfallen; d. h. wenn die Funktion (bezw. Form) f eine Doppelwurzel e_i bekommt? Wir haben schon oben bemerkt, dass sich die Differentialgleichung in einem solchen Doppelpunkt immer noch regulär verhält. Des Näheren findet man (K), dass die daselbst auftretenden Exponenten einander entgegengesetzt gleich sind, und dass sie, sofern wir an die homogene Form 5) der Laméschen Gleichung anknüpfen, die Werthe haben:

$$\pm\sqrt{\frac{2\varphi(e_i)}{n(n-1)f''(e_i)}-\frac{n-4}{8(n-1)}}\ ^{*)}.$$

Wenn aber drei oder mehr einfache singuläre Punkte zusammenfallen, wird die Lamésche Gleichung in diesem Punkte im allgemeinen irregulär (K).

Was schliesslich das Zusammenfallen eines einfachen oder eines mehrfachen singulären Punktes mit dem Punkte $x=\infty$ angeht, so sehen wir aus der homogenen Form sofort, dass dies von keiner wesentlichen Bedeutung sein kann. Selbstverständlich aber nehmen die nicht homogenen Formen der Laméschen Gleichung alsdann eine etwas andere Gestalt an. Werden z. B. e_1 und e_2 ins Unendliche geworfen, so nimmt die Gleichung 3) S. 33 folgende Form an:

$$\frac{d^2y}{dt_1^2}=[Ax^{n-4}+Bx^{n-5}+\cdots+M].y,$$

bei welcher t_1 das hyperelliptische Integral bedeutet:

$$t_1=\int\frac{dx}{2\sqrt{(x-e_3)(x-e_4)\ldots(x-e_n)}}.$$

Dies ist nun gerade die Heinesche Differentialgleichung für Lamésche Funktionen $(n-3)$ter Ordnung, womit das, was vorhin über Heine's Definition gesagt wurde, bestätigt ist**).

Schliesslich haben wir noch einen anderen Punkt zu besprechen. Wir bemerkten, dass bei einem ν-fachen singulären Punkte ($\nu \geqq 3$) im allgemeinen irreguläres Verhalten der Laméschen Gleichung eintritt. Wenn wir aber auf die Gleichung 2) S. 32 Bezug nehmen, sehen wir, dass dies nicht mehr der Fall ist, sobald die Funktion $ax^{n-4}+bx^{n-5}+\cdots+m$ im betreffenden Punkte $(\nu-2)$-fach verschwindet. Indem wir diesen Umstand weiter überlegen, kommen wir auf folgenden Satz:

---

*) Wenn die Differenz dieser Exponenten ganzzahlig ist, werden in der Nähe unseres zweifachen singulären Punktes im allgemeinen natürlich logarithmische Irrationalitäten auftreten; doch gehen wir hierauf der Kürze halber nicht näher ein.

**) Heine specialisirt dann selbstverständlich noch, nach dem Vorgange von Lamé, die accessorischen Parameter A, B, . . . M in der Weise, dass die Gleichung eine algebraische Lösung erhält; dieser ganze Ansatz wird im Texte übergangen, weil er in der That für uns nicht in Betracht kommt.

Wenn e_k eine ν-fache Wurzel ($\nu \gtreqqless 3$) der Form f und zugleich eine μ-fache Wurzel ($\mu \leqq \nu-2$) der Form φ ist, so sind die Laméschen Formen, welche durch die Gleichung:

$$(f_n,\ F_{\frac{4-n}{4}})_2 = \varphi_n \,.\, F_{\frac{4-n}{4}}$$

definirt sind, einfach so ausgeartet, dass sie nach Multiplication mit dem Faktor $(x_1 - e_k x_2)^{\frac{\mu}{4}}$ Laméschen Formen $\bar{F}$ liefern, welche der Gleichung genügen:

$$(\bar{f}_{n-\mu},\ \bar{F}_{\frac{4-n+\mu}{4}})_2 = \bar{\varphi}_{n-\mu-4} \,.\, \bar{F}_{\frac{4-n+\mu}{4}},$$

wo $f = (x_1 - e_k x_2)^{\mu} . \bar{f}$ gesetzt ist und $\bar{\varphi}$ eine gewisse, von φ, f, und $(x_1 - e_k x_2)$ abhängende ganze rationale binäre Form $(n-\mu-4)$-ter Dimension bedeutet.

Der Beweis dieses Satzes lässt sich beispielsweise leicht so führen, dass wir zur Form 4) der nichthomogenen Laméschen Gleichung zurückgreifen und dort den Punkt e_k in's Unendliche werfen. Diesen Beweis wollen wir aber der Kürze halber überspringen.

Für Lamésche Funktionen haben wir natürlich einen ganz ähnlichen Satz, in welchem statt $(x_1 - e_k x_2)^{\frac{\mu}{4}}$ der Faktor $(x - e_k)^{\frac{\mu}{4}}$ vorkommt. Ist insbesondere $e_k = \infty$, so fällt dieser Factor (für die nicht homogene Formulirung) überhaupt weg.

Die hiermit besprochenen Specialisirungen werden wir weiter unten für den Fall $n = 5$ noch näher betrachten (§ 6) und dort auch die besonderen Namen nennen, unter denen diese specialisirten Funktionen bekannt sind.

§ 4. Ueber die Behandlung der Potentialtheorie durch pentasphärische und cyclidische Coordinaten.

Ehe wir zum Gegenstand dieses Paragraphen übergehen, wollen wir bemerken, dass die hier darzulegenden Methoden sich insofern von den gewöhnlichen Methoden der mathematischen Physik unterscheiden, als wir zur Festlegung der Raumpunkte homogene Variablen gebrauchen werden. Hierdurch führen wir keinen neuen Coordinatenbegriff, sondern nur eine neue Schreibweise ein, welche sich wegen ihrer Zweckmässigkeit bei allgemeinen Untersuchungen über Transformation etc. schon in vielen Zweigen der Geometrie und Analysis eingebürgert hat, und mit gleichem Rechte ihre Stelle in der mathematischen Physik beanspruchen darf*). Die bezüglichen Methoden, über welche wir in diesem Paragraphen leider nur kurz referiren können, gehen wesentlich auf zwei Noten von Herrn Darbaux zurück**).

---

*) Man kann die vorhin besprochene homogene Form der Laméschen Differentialgleichung als ein Seitenstück hierzu betrachten.

**) Comptes Rendus 1876, II. Bd. 83, p. 1037 und p. 1099.

Zunächst fragen wir uns, wie das Potential überhaupt im Sinne der Geometrie der reciproken Radien zweckmässigerweise zu behandeln ist. Wir wollen dabei der Kürze halber pentasphärische Coordinaten mit der Identität $\sum_1^5{}_\iota x_\iota^2 = 0$ zu Grunde legen. Das Charakteristische ist nun, dass wir statt der Potentialfunktionen Potentialformen studiren werden, für welche der unendlich ferne Punkt nicht mehr ein ausgezeichneter Punkt ist, wie dies bei den Potentialfunktionen als solchen der Fall ist. Indem ich wegen der Einzelheiten auf die neu erschienene Schrift von Herrn Pockels*) verweise, gebe ich nur folgendes Hauptresultat an:

Ist V eine beliebige Potentialfunktion, und setzen wir:

$$V = \left(\sum_1^5{}_\iota \frac{x_\iota}{R_\iota}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot W(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

(wo $\sum_1^5{}_\iota \frac{x_\iota}{R_\iota} = 0$ die unendlich ferne Punktkugel bedeutet) so wird die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0$$

befriedigt sein, wie man auch W mit Hülfe der Identität $\sum_1^5{}_\iota x_\iota^2 = 0$ umformen mag. Dementsprechend nennen wir W eine Potentialform.

Oder umgekehrt:

Jede Form $-\frac{1}{2}$-ter Dimension in den pentasphärischen Coordinaten, welche der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x_5^2} = 0,$$

ist eine Potentialform; d. h. liefert mit der $\frac{1}{2}$-ten Potenz der linken Seite der Gleichung der unendlich fernen Punktkugel multiplicirt, eine Potentialfunktion.

Der Fortschritt, welcher in diesen Sätzen liegt, ruht zumal darin, dass die partielle Differentialgleichung für W gegenüber beliebiger Kugelverwandtschaft ungeändert ihre Form bewahren wird**).

Die nächste Aufgabe ist nun, an Stelle der pentasphärischen Coordinaten cyclidische Coordinaten in die Gleichung der Potentialformen einzuführen. Dies ist aber offenbar nicht ohne Weiteres möglich, da wir vier unabhängige Grössen nicht durch drei andere ersetzen können; wir werden vielmehr, auf die Formeln von S. 23 Bezug nehmend, an Stelle der

*) „Ueber die Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$." S. 197 ff. (Leipzig, 1891).

**) Wegen des Zusammenhanges dieser Methode der Potentialformen mit Thomson's Behandlung der Inversion in der Potentialtheorie vergl. Darboux l. c.

pentasphärischen Coordinaten zunächst die vier Variablen μ, ν, ρ, σ einführen müssen. Nun können wir aber wegen der Homogenität von W schreiben:

$$W(\sqrt{\sigma}x_1, \sqrt{\sigma}x_2, \ldots \sqrt{\sigma}x_5) = \sigma^{-\frac{1}{2}} . W(x_1, x_2, \ldots x_5).$$

und $\sqrt{\sigma}x_1$, $\sqrt{\sigma}x_2, \ldots \sqrt{\sigma}x_5$ sind direct durch μ, ν, ρ ausdrückbar. Wir können also setzen:

$$W(x_1, x_2 \ldots x_5) = \sigma^{\frac{1}{2}} . \psi(\mu, \nu, \rho),$$

wo nun ψ einer partiellen Differentialgleichung in Bezug auf μ, ν, ρ genügen wird, während $\sqrt{\sum_1^5{}_i e_i x_i^2}$ für σ geschrieben werden kann. Auf die Ableitung dieser Gleichung für ψ können wir hier wieder nicht näher eingehen, fassen vielmehr die Eigenschaften dieses ψ, indem wir der Deutlichkeit halber die Zwischenstufe der Potentialformen W ganz überspringen, mit folgenden Worten zusammen:

Will man das Potential in cyclidischen Coordinaten beherrschen, so setze man:

$$V = \left(\frac{\sum_1^5{}_i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5{}_i e_i x_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi(\mu, \nu, \rho).$$

Dann genügt ψ der Differentialgleichung:

$$(\rho-\nu)\frac{\partial^2\psi}{\partial u^2} + (\mu-\rho)\frac{\partial^2\psi}{\partial v^2} + (\nu-\mu)\frac{\partial^2\psi}{\partial w^2} + (\mu-\nu)(\nu-\rho)(\rho-\mu)\left[\tfrac{5}{4}(\mu+\nu+\rho) - \tfrac{3}{4}\sum_1^5{}_i e_i\right] \cdot \psi = 0 \text{*)},$$

unter u, v, w die Werthe verstanden, welche das hyperelliptische Integral

$$t = \int \frac{d\lambda}{2\sqrt{(\lambda-e_1)\ldots(\lambda-e_5)}}$$

für $\lambda = \mu, \nu, \rho$ annimmt.

§ 5. Ueber die Befriedigung der Potentialgleichung durch Lamésche Producte in den Fällen I a), II a), III a).

Jetzt fragen wir uns, und dieser Gedanke ist für die weiter darzulegende Methode der mathematisch-physikalischen Reihenentwickelungen fundamental, ob wir

*) Diese Gleichung wurde bereits von Herrn Wangerin an der in der Einleitung genannten Stelle Crelle Bd. 82. 1876 abgeleitet; Herr Darboux hat dieselbe nur mit der Auffassungsweise der Geometrie der reciproken Radien in die im Texte dargelegte Verbindung gebracht.

eine ψ-Funktion, welche der partiellen Differentialgleichung des vorigen Paragraphen genügt, und also nach Multiplication mit dem Faktor

$$\left(\frac{\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}_i e_i x_i^2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

eine Potentialfunktion liefert, von folgender Form finden können:

$$\psi(\mu, \nu, \rho) = E_1(\mu) \,.\, E_2(\nu) \,.\, E_3(\rho).$$

(also eine ψ-Function, in welcher die drei Variabelen μ, ν, ρ getrennt sind). Ein solches ψ wollen wir ein Lamésches Product nennen, denn gerade diese Art von Fragestellung ist der Ausgangspunkt von Lamé gewesen. Nun sieht man mit leichter Mühe, dass in der That eine ψ-Function der verlangten Art vorliegt, sobald die drei Faktoren E_1, E_2, E_3 alle drei, jeder in Bezug auf die bei ihm vorkommende Variable, einer und derselben Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d^2E}{dt^2} = [-\tfrac{5}{4}\lambda^3 + \tfrac{3}{4}\sum_1^5 {}_i e_i \,.\, \lambda^2 + A\lambda + B] \,.\, E$$

(wo A und B willkürlich zu wählende Constante sind, die aber für die drei Funktionen E_1, E_2, E_3 dieselben sein müssen). Diese Differentialgleichung stimmt aber ohne Weiteres mit Gleichung 3) S. 33 überein, sofern wir nur in letzterer $n = 5$ setzen. Wir gewinnen also folgenden Satz:

Wir können ein Lamésches Product bilden, indem wir die drei Faktoren desselben als irgendwelche Lamésche Funktionen annehmen, die Particularlösungen einer und derselben Laméschen Gleichung $n = 5$ sind, welche die Punkte $e_1 \ldots e_5$ als einfache singuläre Punkte besitzt. Die accessorischen Parameter A, B der Laméschen Gleichung sind dabei keinerlei Beschränkung unterworfen.

So haben wir denn Potentialfunktionen von der Form gewonnen:

$$V = \left(\frac{\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}_i e_i x_i^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot E_1(\mu) \cdot E_2(\nu) \cdot E_3(\rho).$$

Dabei scheint die Cyclide $\sum_1^5 {}_i e_i x_i^2 = 0$, welche in der Cyclidenschaar $\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$ dem Parameterwerth $\lambda = \infty$ entspricht, bevorzugt zu sein. Nun wissen wir aber, dass jedenfalls geometrisch diese Cyclide keineswegs ausgezeichnet ist, sondern dass man bei gegebener Flächenschaar den Parameter λ noch auf dreifach unendlich viele Weisen einführen kann und insbesondere irgend welche Cyclide der Schaar dem Werthe $\lambda = \infty$ zuordnen kann. In

der That ist die Bevorzugung der Cyclide $\sum_1^5 {}_i\, e_i x_i^2 = 0$ in unserer Formel nur eine scheinbare, und hängt damit zusammen, dass wir bei der unhomogenen Definition der Laméschen Funktionen den Punkt $\lambda = \infty$ ausgezeichnet haben. Wir erkennen dies sofort, indem wir für λ homogen machend $\lambda_1 : \lambda_2$ schreiben und dann statt der Laméschen Funktionen Laméscheforme »Formen« einführen (*K*). In der That, machen wir die cyclidischen Coordinaten homogen, indem wir setzen:

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad \nu = \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \rho = \frac{\rho_1}{\rho_2},$$

so können wir unsere Potentialfunktion in folgender Gestalt schreiben:

$$V = \left(\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\mu_2 \cdot \nu_2 \cdot \rho_2}{\sum_1^5 {}_i\, e_i x_i^2}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot F_1(\mu_1, \mu_2) \cdot F_2(\nu_1, \nu_2) \cdot F_3(\rho_1, \rho_2).$$

Nun haben wir nur folgende Identität zu Hülfe zu nehmen, deren Richtigkeit mit leichter Mühe einzusehen ist:

$$\sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda_1 - e_i \lambda_2} = \frac{|\lambda\mu| \cdot |\lambda\nu| \cdot |\lambda\rho| \cdot \lambda_2}{f(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \mu_2 \cdot \nu_2 \cdot \rho_2} \sum_1^5 {}_i\, e_i x_i^2,$$

(wo $|\lambda\mu|$, $|\lambda\nu|$, $|\lambda\rho|$ in bekannter Weise für die entsprechenden zweigliedrigen Determinanten gesetzt sind, z. B. $|\lambda\mu|$ für $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$). Hierdurch bekommen wir nämlich als Ausdruck für unsere Potentialfunktion:

$$V = \left(\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{|\lambda\mu| \cdot |\lambda\nu| \cdot |\lambda\rho| \cdot \lambda_2}{f(\lambda_1, \lambda_2) \sum_1^5 {}_i \frac{x_i^2}{\lambda_1 - e_i \lambda_2}}\right)^{\frac{1}{4}} F_1(\mu_1, \mu_2) \cdot F_2(\nu_1, \nu_2) \cdot F_3(\rho_1, \rho_2),$$

wo nun λ_1, λ_2 als Grössen, welche nur formal auftreten, irgend welche Werthe haben können, so dass thatsächlich, ohne dass an V irgend etwas geändert wäre, eine beliebige Cyclide $\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{\lambda - e_i} = 0$ der Schaar ebenso als ausgezeichnet erscheint, wie vorhin die Cyclide $\sum_1^5 {}_i\, e_i x_i^2 = 0$.

Wir haben uns bis jetzt in diesem Paragraphen (wie auch im vorigen) auf cyclidische Coordinaten des allgemeinen Falles I *a*) beschränkt. Nun müssen wir noch zusehen, wie sich die Entwickelungen auf die Fälle II *a*) und III *a*) übertragen.

Zu dem Zwecke wollen wir zunächst die Substitution machen: $x_i \sim \sqrt{a_i} \cdot x_i$, so dass also die Identität die Form annimmt $\sum_1^5 {}_i\, a_i x_i^2 = 0$, und die Gleichung der Cyclidenschaar die Gestalt $\sum_1^5 {}_i \frac{a_i x_i^2}{\lambda - e_i} = 0$. Hierdurch erhält dann unser Potential V die Gestalt:

$$V = \left(\frac{\sum_1^5 {}_i \frac{a_i x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}_i\, e_i a_i x_i^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \psi(\mu, \nu, \rho);$$

die partielle Differentialgleichung, welcher das ψ genügt, ist dabei gar nicht geändert worden. Wenn wir nun eben die Grenzübergänge machen, die uns auf S. 31—32 zu den Kategorien II und III geführt haben, so geht der Faktor mit welchem ψ in V multiplicirt ist, in folgenden über:

$$\left(\frac{\sum_1^5{}_i\, c_i x_i}{\sqrt{e_1(2x_1x_2) + x_1^2 + e_3x_3^2 + e_4x_4^2 + e_5x_5^2}}\right)^{\frac{1}{2}} \text{ bezw. } \left(\frac{\sum_1^5{}_i\, c_i x_i}{\sqrt{e_2(2x_1x_3 + x_2^2) + 2x_1x_2 + e_4x_4^2 + e_5x_5^2}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$\sum_1^5{}_i\, c_i x_i = 0$ soll dabei beidemal die Gleichung der unendlich fernen Punktkugel sein. Die neuen Funktionen ψ aber müssen natürlich ihrerseits partiellen Differentialgleichungen genügen, welche durch unsere Grenzübergänge aus der ursprünglich für ψ geltenden partiellen Differentialgleichung entstehen. Da aber die Grössen a_i hier überhaupt nicht in Betracht kommen, so gestalten sich diese Grenzübergänge ausserordentlich einfach, indem sie auf ein blosses Gleichsetzen zweier, bezw. dreier e_i hinauskommen. Dies gilt natürlich auch für die Lamésche Gleichung, welche wir bekommen, wenn wir ψ als Lamésches Product annehmen. Wir erhalten somit folgenden Satz:

In dem Falle II a) bezw. III a) können die drei Faktoren des Laméschen Productes als irgend welche drei Lösungen einer Laméschen Gleichung angenommen werden, welche nach wie vor beliebige accessorische Parameter enthält, aber in soweit particularisirt ist, als sie im ersten Falle neben drei einfachen einen zweifachen singulären Punkt besitzt, im zweiten Falle aber neben zwei einfachen einen dreifachen singulären Punkt.

Wir werden also in der bezüglichen Laméschen Gleichung einfach 2, resp. 3 der e_i einander gleich zu setzen haben.

§ 6. Ueber die Laméschen Producte, welche im Falle der übrigen cyclidischen Coordinatensysteme auftreten.

Nur in den Fällen I a), II a), III a), welche wir im vorigen Paragraphen discutirt haben, sind, wie wir wissen, die krummlinigen Coordinaten μ, ν, ρ alle drei unmittelbar definirt, in allen anderen Fällen müssen einige von ihnen erst durch einen Hülfsgrenzübergang eingeführt werden. Nun wird für diejenigen krummlinigen Coordinaten, welche in irgend welchem Falle ohne weiteres vorhanden sind, der Grenzübergang für die zugehörige Laméсhe Gleichung einfach darin bestehen, dass wir die singulären Punkte der Differentialgleichung genau so zu mehrfachen singulären Punkten zusammenrücken lassen, wie dies durch die Schemata der auf S. 18—22 mitgetheilten Tabelle angegeben wird. Die Vertheilung der jedesmaligen Multiplicität der e_i auf verschiedene Elementartheiler (wie sie in der Tabelle für jeden Fall ausführlich angegeben wird) scheint dabei zunächst nicht in Betracht zu kommen; und wir werden sehen, dass dies unter gewissen Beschränkungen in der That

6

der Fall ist. Vorab müssen wir aber zusehen, was beim Grenzübergang aus denjenigen Laméschen Gleichungen wird, welche den krummlinigen Coordinaten entsprechen, die in den jedesmal verschwindenden Intervallen verloren gehen.

Wir wollen in dieser Hinsicht zunächst diejenigen Fälle ins Auge fassen, bei denen eine Doppelwurzel (11) auftritt, bei denen also das Cyclidensystem durch einen Kugelbüschel mit eigentlichem (nicht in einen Punkt ausgeartetem) Grundkreis ergänzt werden muss. Um die Ideen zu fixiren, wollen wir die zusammenfallenden Punkte e_1 und e_2 nennen. Setzen wir dann nach der S. 24 gegebenen Vorschrift:

$$e_2 = e_1 + \varepsilon, \qquad \lambda = e_1 + \varepsilon\lambda',$$

so nimmt die Lamésche Gleichung (Form 1 S. 32) folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2E}{d\lambda'^2} + \frac{f_1'(\lambda')}{2f_1(\lambda')} \cdot \frac{dE}{d\lambda'} - \frac{C}{4f_1(\lambda')} \cdot E = 0,$$

wo wir der Kürze halber gesetzt haben:

$$f_1(\lambda') = \lambda'(\lambda'-1), \qquad C = \frac{\frac{1}{4}e_1^3 + \frac{3}{4}(e_3+e_4+e_5)e_1^2 + Ae_1 + B}{(e_1-e_3)(e_1-e_4)(e_1-e_5)}.$$

Diese Gleichung ist aber geradezu derjenige Specialfall von Gleichung 1) S. 32, wo $n = 4$, $e_1 = 0$, $e_2 = 1$, $e_3 = e_4 = \infty$. Nun wissen wir bereits, dass Lamésche Gleichungen $n = 4$ sich mit Hülfe des Integrals t trigonometrisch lösen lassen. Dieses Integral t wollen wir hier mit φ bezeichnen und setzen dementsprechend:

$$\int \frac{d\lambda'}{2\sqrt{\lambda'(1-\lambda')}} = \arcsin\sqrt{\lambda'} = \varphi$$

oder

$$\lambda' = \sin^2\varphi.$$

Die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung wird dann einfach:

$$E = L \cdot \sin(\sqrt{C} \cdot \varphi) + M \cos(\sqrt{C} \cdot \varphi).$$

Die hierdurch eingeführte Variable φ hat aber auch eine einfache geometrische Bedeutung, sie stellt nämlich den Winkel vor, welchen die betreffende Kugel des Büschels mit der Grundkugel $x_1 = 0$ macht*). Des Näheren liegen dabei die Verhältnisse folgendermassen: wir bemerkten früher, dass einem einzigen Parameterwerth λ' zwei ganze Kugelflächen unseres Büschels entsprechen. Eine jede dieser Kugelflächen wird jetzt durch den Grundkreis des Büschels in zwei Theile zerlegt. Die vier solcherweise demselben Parameterwerthe λ' entsprechenden Kugelstücke, erhalten jetzt bezw. die vier Parameterwerthe $\pm\varphi$, $\pi \pm \varphi$.

---

*) Dieser Winkel wird natürlich imaginär, sobald der Grundkreis des Büschels nulltheilig ist. Auf diesen Umstand kommen wir später (Kap. III § 7) noch einmal zurück; im Texte denken wir uns der bequemen Ausdrucksweise halber den Grundkreis eintheilig und den Winkel reell.



Ganz ähnlich liegt die Sache, wenn eine dreifache Wurzel (21) oder eine vierfache Wurzel (31) auftritt, (wo dann ebenfalls ein Kugelbüschel, dessen Grundkreis aber in einen Punkt ausgeartet ist, die Cyclidenschaar zum dreifachen Orthogonalsystem ergänzt), sowie auch im Falle dreier zu einander orthogonaler Kugelbüschel. Indem wir nämlich die auf S. 25—27 besprochenen Grenzübergänge an der Laméschen Gleichung ausführen, kommen wir übereinstimmend auf die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2E}{d\lambda'^2} + \frac{1}{2\lambda'} \frac{dE}{d\lambda'} + \frac{C}{4\lambda'} E = 0,$$

d. h. auf eine Lamésche Gleichung $n = 4$ mit dem einfachen singulären Punkte 0 und dem dreifachen singulären Punkte ∞: diese Gleichung lässt sich natürlich trigonometrisch lösen. Was den in derselben auftretenden accessorischen Parameter C angeht, so hängt er in den auf S. 25 betrachteten Fällen von den zwei accessorischen Parametern der Laméschen Gleichung $n = 5$, welche in diesen Fällen der nicht zerfallenden Cyclidenschaar zugehört, linear (aber nicht homogen) ab. Bei den drei Kugelbüscheln von S. 26 haben wir drei Lamésche Gleichungen $n = 4$ der gerade angegebenen Form neben einander, aber die drei in ihnen vorkommenden accessorischen Parameter sind insofern von einander abhängig, wie man findet, als ihre Summe verschwinden muss.

Wenn wir uns nun erinnern, dass nach den auf S. 24, 25, 27 gegebenen Bemerkungen die ergänzenden Kugelbüschel jedesmal eben die Kugelbüschel sind, welche in der auf S. 18—22 abgedruckten Tabelle vorkommen, so werden wir folgenden Satz aufstellen:

Die Schemata der auf S. 18—22 abgedruckten Tabelle geben im allgemeinen die Lage und die Multiplicität der singulären Punkte der Laméschen Gleichungen, welche den bezüglichen Flächenschaaren zugehören, unmittelbar an. Nur wenn e_i eine mehrfache Wurzel ist, welche sich auf drei verschiedene Elementartheiler vertheilt, zerfallen die zugehörigen Laméschen Functionen in das Product von Functionen $n = 4$ und dem Faktor $(\lambda - e_i)^{-\frac{1}{4}}$.

Um diesen Satz vollständig zu begründen, muss man auch diejenigen Schemata in Betracht ziehen, welche direct Kugelbüschel liefern und dann vermöge geeigneten Grenzübergang durch allgemeinere Flächenschaaren ergänzt werden müssen. Wenn man dies ausführt, stellt sich in der That heraus, dass die accessorischen Parameter der zu den ergänzenden Cyclidenschaaren gehörenden Laméschen Gleichungen unendlich werden würden, insofern man die accessorischen Parameter der zum Kugelbüschel gehörenden Laméschen Gleichung nicht gerade so specialisirte, dass die bezeichnete Ausartung der zugehörigen Funktionen eintritt. Inzwischen wollen wir dies hier um so weniger ausführen, als wir im nächsten Kapitel ein Verfahren kennen lernen werden, durch welches Alles dieses mit der grössten Anschaulichkeit ohne weiteres hervortritt.

Wir sehen so, dass wir neben Laméschen Funktionen $n = 4$ im Ganzen sechs Arten Laméscher Funktionen $n = 5$ in Betracht zu ziehen haben. Dieselben zählen

6*

wir nunmehr unter Bezugnahme auf die zugehörigen Schemata auf (K), indem wir sie zugleich mit Namen belegen:

Allgemeine Lamésche Funktionen $n = 5$,	—|——|——|——|——|- - -
Funktionen der dreiaxigen Flächen zweiten Grades,	—||—— ——|——|— —
Kugelfunktionen eines Argumentes*),	-||- - ——||——|——
Funktionen der zweiaxigen Cylinder zweiten Grades**),	—|||——|———|——
Funktionen des Rotationscylinders (Besselsche Funktionen),	—||| - ——||———
Funktionen des parabolischen Cylinders.	- -|||¦———|———

Schliesslich sei als ein Hauptergebnis dieses Kapitels hervorgehoben, dass dieselbe Art Laméscher Funktionen bei sehr verschiedenen Flächensystemen auftreten kann. So kommen die Funktionen der dreiaxigen Flächen zweiten Grades nicht nur bei dem allgemeinen System confocaler Flächen zweiten Grades***) vor, sondern auch bei den confocalen Kegeln zweiten Grades und bei allen Rotationscycliden. Ebenso treten Kugelfunktionen nicht nur im Falle der Rotationskegel auf, sondern auch beim Kreisring und bei den beiden zu unterscheidenden Systemen von Rotationsflächen zweiten Grades, — die Funktionen der zweiaxigen Cylinder aber bei den allgemeinen Paraboloiden, und die Funktionen des Rotationscylinders bei den Rotationsparaboloiden. Diese Thatsachen, welche einzeln genommen wohl schon alle bekannt waren, finden durch die hier dargelegte Theorie (K) eine höchst anschauliche gemeinsame Erklärung.

---

*) Hierher gehören alle „Kugelfunktionen“ und „zugeordnete Funktionen“ Heine's, aber zugleich auch, da der Index der Funktionen bei uns ganz unbeschränkt ist, Herrn Mehler's Kegelfunktionen.

**) Heine, der diese Funktionen zuerst einführte, nannte sie ursprünglich, mit Rücksicht auf die besondere Anwendung, die er im Sinne hatte, Funktionen des elliptischen Cylinders.

***) Es sind natürlich hier überall unter den angeführten Namen diejenigen Flächen mit zu verstehen, welche aus den unmittelbar genannten durch irgendwelche Inversion hervorgehen.

Kapitel III.

Festlegung bestimmter Laméscher Funktionen bei gegebenem Cyclidensechsflach und deren Benutzung bei den zugehörigen Reihenentwickelungen der Potentialtheorie.

Im vorigen Kapitel haben wir gesehen, wie man allgemein mit Hülfe Laméscher Funktionen Potentiale bilden kann. Die betreffenden Potentiale, welche verallgemeinerte Lamésche Producte heissen mögen, hatten die Form:

$$T \cdot (L' E_1'(\mu) + M' E_2'(\mu)) \cdot (L'' E_1''(\nu) + M'' E_2''(\nu)) \cdot (L''' E_1'''(\rho)) + M''' E_2'''(\rho)),$$

in welcher T eine nach Festlegung des Coordinatensystems völlig bestimmte Funktion des Ortes bedeutet, $L', M', \ldots M'''$ willkürliche Constante sind, und die Laméschen Funktionen E implicite von zwei weiteren noch unbestimmten Constanten abhängen, welche in der zugehörigen Laméschen Gleichung als accessorische Parameter auftreten. Natürlich vereinigen sich die $L', M', \ldots$ bei der Multiplication zu nur vier Constanten. Nun werden wir aber weiterhin zwischen solchen Potentialen nicht unterscheiden, die nur um einen constanten Faktor differiren. Wir können daher sagen (indem wir die beiden accessorischen Parameter mitzählen):

Im vorigen Kapitel haben wir gelernt, für jedes von uns betrachtete krummlinige Coordinatensystem ∞^5 Potentiale in der Form verallgemeinerter Laméscher Producte zu bilden.

Nun entsprechen diese Potentiale an sich keinen besonders einfachen oder wichtigen physikalischen Fragestellungen. Wir können aber aus ihnen allgemeinere Potentiale durch Addition zusammensetzen, und diese sind es, durch deren Betrachtung die in den Vorbemerkungen besprochene Randwertaufgabe zur Lösung gebracht werden kann. Wir führen dies gleich genauer aus:

Die Bedeutung der Laméschen Funktionen für die Potentialtheorie liegt darin, dass man aus den obenerwähnten ∞^5 Potentialen ∞^2 (welche eine discrete oder ev. eine continuirliche Reihenfolge bilden) derart auswählen kann, dass die Doppelsumme, ev. das Integral, welches man aus diesen ∞^2 Producten nach Zufügung je eines geeigneten Coefficienten zu

den einzelnen Producten zusammensetzen kann, unsere Randwerthaufgabe*) für einen durchaus rechtwinkligen Körper löst, welcher von irgend welchen sechs Flächen des Coordinatensystems begrenzt ist.

Unsere Eintheilung ist jetzt folgende:

Wir werden in §§ 4 — 5 dieses Kapitels das genannte Problem für den allgemeinen Fall behandeln, wo unser Körper von sechs verschiedenen confocalen Cycliden eines Systems I a) begrenzt ist (K); weiter werden wir in den darauf folgenden Paragraphen die Ausartungen dieses Körpers kurz besprechen, wodurch wir eine Uebersicht über die ganze Theorie der Reihenentwickelungen der Potentialtheorie gewinnen werden. In der That lassen sich die grosse Mehrzahl der bis jetzt durch die Methode der Reihenentwickelung behandelten Körper, wie schon im Wortlaut der Preisaufgabe angedeutet ist, als Ausartungen des soeben erwähnten allgemeinen Körpers auffassen.

Ehe wir aber (von § 4 ab) die genannten Potentialprobleme in Angriff nehmen, müssen wir vorab einige Eigenschaften der Laméschen Funktionen kennen lernen, welche wir später benutzen wollen. Die zunächst folgenden ersten Paragraphen können also als ein rein mathematischer Excurs angesehen werden**).

§ 1. Allgemeines über den Verlauf der Laméschen Curven $y = E(x)$ bei beliebigem n und besondere Angaben für $n = 4$.

In diesem Paragraphen werden wir der Einfachheit halber nur solche Lamésche Funktionen betrachten, welche n einfache singuläre Punkte besitzen. Ferner wollen wir annehmen, damit wir unserem physikalischen Interesse entsprechend ganz im reellen Gebiete bleiben können, dass nicht nur die Coefficienten der ausmultiplicirten Funktion:

$$f(x) = (x-e_1)(x-e_2) \dots (x-e_n)$$

sondern auch die accessorischen Parameter der vorgelegten Laméschen Gleichung reell sind. Dem Gesagten zufolge werden die singulären Punkte unserer Gleichung, sofern sie nicht paarweise einander conjugirt imaginär sind, reell sein.

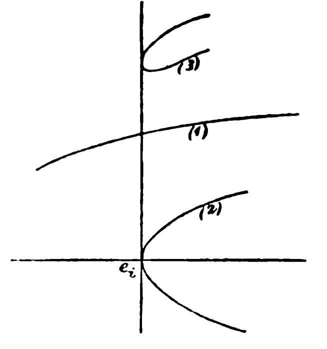
Unter E eine beliebige reelle Lösung der Laméschen Gleichung verstanden, fassen wir jetzt die Curve $y = E(x)$ in's Auge und betrachten zunächst ihren Verlauf für solche Werthe von x, welche von einem reellen singulären Werth e_i nur wenig verschieden sind.

*) Auch für die verallgemeinerte Randwerthaufgabe (vergl. S. 2) können Lamésche Funktionen bis zu einem gewissen Grade in ähnlicher Weise verwendet werden, wie in dem im Texte ausschliesslich besprochenen einfachen Falle. Eine analoge Bemerkung gilt für das Problem der Bestimmung des Potentials räumlich vertheilter Massen. Hierauf können wir aber an dieser Stelle nicht näher eingehen.

**) Der erste Ansatz für die Entwickelungen, welche hier in §§ 1 — 5 enthalten sind, befindet sich in dem schon citirten Aufsatz von Herrn Klein in Bd. 18 der Math. Ann.: „Ueber Körper, welche von confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt sind." Die dort entwickelte Theorie wurde dann von Herrn Klein in seiner Vorlesung über Lamésche Funktionen eben mit der Allgemeinheit vorgetragen, welche sie in den folgenden Paragraphen besitzt. Ich habe nur an einzelnen Stellen (namentlich in § 2) den Beweis gewissermassen neu gegliedert. Dagegen habe ich in §§ 6—7 der Theorie Neues hinzugefügt.



Natürlich entsprechen einer vorgelegten Lamé schen Gleichung ∞^2 derartige Curven (oder vielmehr Curvenzweige). Aus den Entwickelungen von S. 29 sehen wir, dass es unter diesen Curven ∞^1 gibt ($y = LE_1(x)$), welche für den Werth $x = e_i$ keine Singularität aufweisen, und ∞^1 andere gibt ($y = ME_2(x)$), welche die Ordinate $x = e_i$ im Punkte $y = 0$ parabelartig berühren. Der allgemeine Zweig

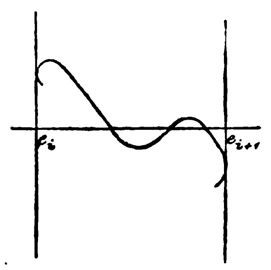


$$y = LE_1(x) + ME_2(x)$$

wird also ganz auf der einen Seite der genannten Ordinate verlaufen und dieselbe in einem beliebigen Punkte berühren*). (Vergl. die Curven (1), (2), (3) der nebenstehenden Figur).

Nun wollen wir in diesem und dem nächsten Paragraphen den Verlauf einer Lamé schen Curve zwischen zwei aufeinanderfolgenden singulären Stellen näher untersuchen. Der Bequemlichkeit halber werden wir aber annehmen, dass dieses Intervall der x-Axe ganz im Endlichen liege. In der That besitzt jede Lamé sche Curve (sowie auch jede Lamé sche Funktion), vermöge der bei uns festgehaltenen Festlegungen, den Punkt $x = \infty$ als uneigentlich singulären Punkt. Wenn wir also auch solche Intervalle der x-Axe in Betracht ziehen wollten, welche durch's Unendliche gehen, müssten wir jedesmal besondere Zusatzbetrachtungen für den Punkt $x = \infty$ machen. Hierdurch würde aber unsere Theorie sehr weitläufig werden, und wir schliessen also der Kürze halber solche Intervalle im Folgenden aus (vergl. S. 34).

Was nun den Verlauf einer Lamé schen Curve zwischen den Punkten e_i und e_{i+1} angeht, so sehen wir sofort, dass die Curve (sofern sie in dem Intervalle überhaupt reell ist) in demselben durchaus stetig verläuft und jedem x ein bestimmtes y eindeutig zuordnet. An den beiden Endordinaten des Intervalles wird dann aber die Curve im allgemeinen parabelartig reflectirt, so dass wir es, wenn wir die Curve längs des Intervalles hin- und hergehend unbegrenzt verfolgen, allgemein zu reden mit einer unendlich vieldeutigen Funktion y von x zu thun haben; auf diese Weise kann dann eine Lamé sche Curve ganz gut Doppelpunkte bekommen, indem zwei ihrer Zweige sich schneiden. Jeder Zweig für sich genommen, muss aber ohne Punktsingularität von dem einen Ende des Intervalles zum anderen laufen. Es soll dies durch die nebenstehende Figur schematisch erläutert sein.



*) Indem wir die E_1, E_2 als die zu den Exponenten 0, ½ im Punkte e_i gehörigen Lösungen wählen, ist offenbar nöthig, damit wir es überhaupt mit einem reellen Curvenzweig zu thun haben, dass in der Formel des Textes die Constante L reell genommen wird, während die Constante M entweder reell oder rein imaginär sein wird, je nachdem unserer Curvenzweig rechter oder linker Hand von der Ordinate $x = e_i$ verlaufen soll.

Nun liegt es auf der Hand, dass wir uns fragen können, ob der einzelne Curvenzweig $y = E(x)$ zwischen den aufeinanderfolgenden singulären Punkten, der x-Axe mehrfach begegnet, wie wir es soeben in der Figur gezeichnet haben, oder nicht. Diese Frage werden wir für den Fall $n = 5$, welcher uns am meisten interessirt, in den folgenden Paragraphen ausführlich behandeln. Wir können uns aber schon gewissermassen orientiren, indem wir vorab den noch einfacheren Fall $n = 4$ ins Auge fassen.

In diesem Falle haben wir als allgemeine Lamésche Curve (vergl. S. 34) die folgende:

$$y = L\sin(\sqrt{-a}\cdot t + M\cos(\sqrt{-a}\cdot t)$$

wo t das elliptische Integral bedeutet:

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-e_1)(x-e_2)(x-e_3)(x-e_4)}}.$$

Nehmen wir e_1, e_2, e_3, e_4 reell an, so ist die reelle x-Axe durch diese Punkte in vier Intervalle getheilt. In zweien dieser Intervalle, welche nicht an einander grenzen, und welche wir, um die Ideen zu fixiren, als $e_1 e_2$ und $e_3 e_4$ annehmen wollen, ist t (nach jedesmaliger geeigneter Festlegung der unteren Integrationsgrenze) reell, in den anderen zwei (auf Grund entsprechender Festlegung) rein imaginär. Hiernach sehen wir, dass die Lamésche Curve entweder in den Intervallen $e_1 e_2$ und $e_3 e_4$ oder in den Intervallen $e_2 e_3$ und $e_4 e_1$ den Charakter einer Sinuscurve haben wird, jenachdem nämlich der accessorishe Parameter a negativ oder positiv ist.

Hiermit meinen wir, dass die Curve in den bezüglichen Intervallen ebenso oscillirt, wie es eine Sinuscurve thut, nur dass die Längen der den verschiedenen Oscillationen entsprechenden Stücke der x-Axe einander nicht gleich zu sein brauchen. Uebrigens wird auch in diesem Falle die Lamésche Funktion $y = E(x)$ bei unbeschränkter analytischer (reeller) Fortsetzung im allgemeinen vieldeutig sein, nicht wie der Sinus eindeutig. Lassen wir nämlich den reellen oder rein imaginären Werth von t unbegrenzt wachsen, so durchläuft x ein einziges Intervall immer wieder hin und zurück, und dementsprechend wird sich die Lamésche Curve, wenn nicht besondere Verhältnisse vorliegen, am Ende des Intervalles umbiegen, und dann in neuer Weise weiter oscilliren.

Fassen wir zusammen, so wird die Lamésche Curve, welchen reellen Werth a auch haben mag, in zweien der vier Intervalle oscilliren. In den anderen zwei Intervallen wird sie so zu sagen den Charakter einer Exponentialcurve besitzen. Sie wird dann im Intervalle höchstens einmal der x-Axe begegnen, so oft wir das Intervall auch hin und her durchlaufen mögen.

Schliesslich bemerken wir, dass wir, wie wir es durch passende Wahl des Vorzeichens von a erreichen können, dass die Lösungen einer Laméschen Gleichung $n = 4$ in einem beliebigen der vier Intervalle der x-Axe oscilliren, so auch durch richtige Wahl der Grösse von a bewirken können, dass die Lösungen dieser Gleichung in einem beliebigen Segmente des Intervalles eine beliebig vorgeschriebene Anzahl von Oscillationen aus-

führt. Das betreffende Segment darf dabei das Intervall der x-Axe zum Theil oder im Ganzen mehrfach umspannen*). Zugleich bemerken wir, dass es immer nur einen Werth von a gibt, welcher für ein gegebenes Segment eine vorgeschriebene Zahl von Oscillationen hervorrufen wird. Hiermit sind wir zum einfachsten Falle des von Herrn Klein für beliebige Lamésche Gleichungen aufgestellten Oscillationstheorems gelangt**). Wir werden das Oscillationstheorem für $n = 5$ in § 3 ausführlich besprechen, nachdem wir vorerst noch einige Hülfsbetrachtungen vorausgeschickt haben.

§ 2. Ueber die Oscillationseigenschaften der Laméschen Curven $n = 5$ in den einzelnen Segmenten der x-Axe.

Wir wollen hier für die Lamésche Gleichung die Form 4) von S. 33 zu Grunde legen, die für $n = 5$ lautet:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-f''(x)}{16} + ax + b\right] \cdot y.$$

Dabei wollen wir dahingestellt sein lassen, ob sämmtliche Wurzeln von $f(x)$ reell sind oder ob zwei von ihnen einander conjugirt imaginär sind. In den 6 bezw. 4 Intervallen der x-Axe, welche durch die reellen Punkte e_i und den Punkt $x = \infty$ begrenzt sind, kann das in Betracht kommende hyperelliptische Integral t (durch jedesmal zweckmässige Annahme der unteren Grenze) abwechselnd reell und rein imaginär angenommen werden.

Fassen wir zunächst eines der Intervalle ins Auge, für welche t reell angenommen werden kann. Dann ist die hier geschriebene Form der Laméschen Gleichung ohne Weiteres einer mechanischen Deutung fähig. Wir werden nämlich die Variable t als die Zeit und y als den Abstand eines Massenpunktes Eins von einem festen Kraftcentrum deuten. Der Massenpunkt soll sich nur auf seiner geraden Verbindungslinie mit dem Kraftcentrum bewegen können. Sobald wir jetzt annehmen, dass die eigentliche Kraft des Centrums gleich der $\left(\frac{f''(x)}{16} - ax - b\right)$-fachen Entfernung von demselben ist, erscheint die Lamésche Gleichung gerade als die Bewegungsgleichung des Massenpunktes. Da x eine hyperelliptische Funktionen von t ist, wird die Intensität der in Rede stehenden Kraft natürlich mit der Zeit veränderlich sein und eine abstossende Kraft werden, sobald $\left(\frac{f''(x)}{16} - ax - b\right)$ negativ ist.

---

*) Diese mehrfache Ueberdeckung der x-Axe entspricht genau der in der Funktionentheorie wohlbekannten mehrfachen Ueberdeckung der complexen Zahlenebene durch eine Riemannsche Fläche, nur dass wir uns hier auf reelle Werthe der Variablen beschränken.

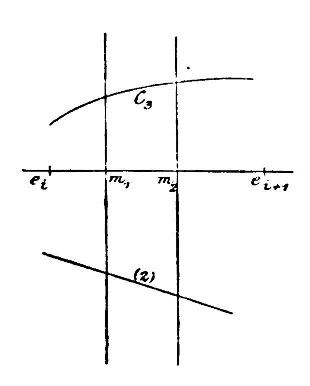
**) Dieses Theorem ist zuerst von Herrn Klein (1881 Math. Ann. Bd. 18 S. 419) für Lamésche Gleichungen $n = 5$ mit einem zweifachen singulären Punkte im Unendlichen aufgestellt worden. Später (K) wurde es nicht nur auf den allgemeinen Fall $n = 5$ ausgedehnt, sondern auf beliebige n, worauf wir hier nicht eingehen können.

Nun sehen wir unmittelbar mechanisch ein, dass, wenn die Kraft eine Zeit lang eine anziehende ist, der Massenpunkt um das Kraftcentrum herum hin und her oscilliren wird, und zwar um so rascher, je stärker die anziehende Kraft ist. Sobald aber die Kraft eine abstossende wird, verliert die Bewegung diesen oscillirenden Charakter und verläuft vielmehr so, dass der Massenpunkt nachdem er höchstens noch einmal durch das Kraftcentrum hindurchgegangen ist, sich von demselben unbegrenzt entfernt.

Jetzt nehmen wir an, dass unser Massenpunkt zu einer Zeit, welche dem Werthe $x = m_1$ entsprechen mag, gerade durch das Kraftcentrum mit beliebiger Geschwindigkeit hindurchgeht. Wir lassen jetzt t bis zu dem Betrage wachsen, der $x = m_2$ entspricht, und stellen uns folgende Frage:

Können wir die accessorischen Parameter a und b unserer Laméschen Gleichung so bestimmen, dass der Massenpunkt in dem betrachteten Zeitintervall genau m Halboscillationen ausführt?

Um diese Frage zu beantworten ziehen wir die geometrische Anschauung zu Hülfe. Deuten wir wieder x als Abscisse, y als Ordinate, so entspricht unser Zeitintervall einem Segment $m_1 m_2$, welches keinen singulären Punkt überschreitet, und wir wollen wieder der Kürze halber annehmen, dass es ganz im Endlichen liege. Dieses Segment kann natürlich das Intervall zwischen zwei benachbarten singulären Punkten oder doch Theile dieses Intervalls mehrfach überdecken, wir wollen aber zunächst annehmen, dass dies nicht der Fall ist.



Nun construiren wir uns ferner die Curve dritter Ordnung:

$$y = \frac{f''(x)}{16},$$

und die Hülfsgerade:

$$y = ax + b.$$

Die Differenz der Ordinaten dieser zwei Curven für eine beliebige Abscisse des Segmentes $m_1 m_2$ gibt die Kraft für den entsprechenden Zeitmoment, nach Grösse und Vorzeichen, so zwar, dass die Kraft anziehend wirkt, wenn die Hülfsgerade (wie in der Figur) unterhalb der Curve dritter Ordnung liegt, im anderen Falle aber abstossend.

Jetzt beachte man, dass die Curve dritter Ordnung, deren Gleichung keinerlei willkürliche Constante enthält, durchaus festliegt und für endliche Abscissen x überall eindeutig, stetig und reell verläuft. Dagegen hängt die Lage der Hülfsgeraden vollständig von den accessorischen Parametern a und b ab. Geben wir dieser Hülfsgeraden irgendwelche beliebige Richtung (welche nicht gerade senkrecht zur x-Axe ist), so können wir sie, wie auch die Curve dritter Ordnung im Segmente $m_1 m_2$ verlaufen mag, soweit nach unten schieben, dass sie in unserem Segmente überall um einen beliebig vorgegebenen Betrag unterhalb der Curve dritter Ordnung bleibt. Dies bedeutet aber für unser mechanisches Problem, dass

wir die anziehende Kraft in jedem Augenblicke des für uns in Betracht kommenden Zeitintervalles einen beliebig gross vorgegebenen Werth überschreiten lassen können. Hierdurch werden wir erreichen können, dass die Anzahl der Halboscillationen, welche unser Massenpunkt in jenem Zeitintervall ausführt, eine willkürlich gegebene Zahl m überschreitet. Indem wir nun die Hülfsgerade unter Beibehaltung ihrer Richtung nach oben verschieben, wird für jeden in unser Intervall fallenden Zeitmoment die anziehende Kraft kleiner werden, und zum Theil sogar abstossend werden, sobald nämlich innerhalb des Segmentes Theile der Hülfsgeraden oberhalb der Curve dritter Ordnung liegen. Beim Aufwärtsschieben der Hülfsgeraden vermindert sich hiernach die Anzahl der Halboscillationen allmählich, und indem wir diesen Process gerade weit genug führen, können wir offenbar erreichen, dass diese Anzahl genau m wird. Wenn wir aber weiter gehen, wird und bleibt diese Anzahl kleiner wie m. — Indem wir jetzt die mechanische Formulirung verlassen, können wir das erhaltene Resultat in folgender Form aussprechen:

Für jede (nicht verticale) Richtung der Hülfsgeraden gibt es eine und nur eine Lage derselben, welche im Segmente $m_1 m_2$ genau m Halboscillationen derjenigen Laméschen Curven hervorruft, deren Ordinate im Punkte m_1 verschwindet.

Fassen wir die Hülfsgeraden ins Auge, welche in der so festgelegten Weise verschiedenen Richtungen entsprechen, so sehen wir, dass sie eine Curve umhüllen, die wir als Hülfscurve bezeichnen wollen. Eine erste Eigenschaft derselben, die wir aus dem Vorhergehenden ableiten, ist die, dass sie, da sie keine parallelen Tangenten besitzt, auch keinen Wendepunkt haben kann. Nun sehen wir ferner, dass je zwei der hier betrachteten Hülfsgeraden sich innerhalb des Streifens schneiden, welcher von den Ordinaten in m_1 und m_2 begrenzt ist. Anderenfalls würde nämlich die eine dieser Hülfsgeraden in jedem Augenblicke des betrachteten Zeitintervalls stärkere Anziehung liefern wie die andere, was offenbar unmöglich ist, da sie dieselbe Anzahl von Oscillationen hervorrufen sollen. Hieraus schliessen wir, dass die Hülfscurve selbst ganz innerhalb dieses Streifens liegt; (denn die Punkte der Curve sind doch jedesmal die Schnittpunkte zweier unendlich benachbarter Tangenten derselben). Nun ist durch die vorhergehenden Betrachtungen nicht ausgeschlossen, dass die Hülfscurve mehrere verticale Tangenten besitzen kann, und zwar sehen wir mit leichter Mühe, dass sie in den Endpunkten m_1 m_2 unseres Segmentes zwei solche Tangenten besitzt. In der That muss sie, da sie Tangenten von jeder von der Verticalen noch so wenig verschiedenen Richtung besitzt, mindestens eine verticale Tangente haben; und diese kann nicht zwischen den Ordinaten m_1 und m_2 liegen, weil sonst eine von ihr unendlich wenig verschiedene Tangente unendlich starke Anziehung für ein endliches Zeitintervall liefern würde, was ja unendlich viele Oscillationen verursachen müsste. Dass ferner beide Endordinaten des Segmentes $m_1 m_2$ Tangenten sind, sehen wir durch leichte Ueberlegung, sowie auch, dass sie Asymptoten sind. Eine von der Verticalen unendlich wenig verschiedene Tangente muss nämlich, da sie Anziehung nur für unendlich kurze Zeit verursacht, während dieser Zeit unendlich starke Anziehung geben, d. h. die Endordinate im Unendlichen schneiden. Hiernach sehen wir, wie etwa die Hülfscurve gestaltet sein wird (vergl. die Curven in der ersten Figur S. 53),

insbesondere, dass sie überall convex nach oben sein wird. Für grosse Oscillationszahlen m wird diese Hülfscurve natürlich tief unterhalb der x-Axe liegen. Wenn dann m ein kleinerer Werth zugetheilt wird, verschiebt sich die Curve nach oben (ohne darum etwa mit sich selbst congruent zu bleiben) und wenn die Curve dritter Ordnung C_3 innerhalb des Segmentes hoch genug oberhalb der x-Axe verläuft, wird der Scheitel der Hülfscurve für kleines m sogar oberhalb der x-Axe liegen.

Nun sind diese Ueberlegungen ohne Weiteres auf Segmente anzuwenden, welche das Intervall $e_i e_{i+1}$, in welchem sie liegen, mehrfach überdecken*). Nur haben die betreffenden Hülfscurven dann nicht mehr die Endordinaten in m_1 und m_2 zu Asymptoten, vielmehr die Ordinaten in e_i und e_{i+1}, oder doch, falls das Segment sich nur in einer Richtung bis an den Endpunkt des Intervalles hin erstrecken sollte, die Ordinate in diesem einen Endpunkte, und daneben dann noch die Ordinate in demjenigen Endpunkte des Segmentes, welcher von dem genannten Endpunte des Intervalles am weitesten entfernt liegt. (Vergl. die zweite Figur auf S. 53, wo die zwei Hülfscurven die beiden hier besprochenen Möglichkeiten vorstellen.)

Mit dem Vorstehenden haben wir unsere Betrachtung nur erst für diejenigen Intervalle der x-Axe zu Ende geführt, in welchen t reell angenommen werden kann. Für die anderen Intervalle konnten wir die untere Integrationsgrenze jedesmal so wählen, dass t rein imaginär wurde. Wir setzen dann einfach $t = i\tau$, und deuten die reelle Grösse τ als Zeit. Unsere mechanische Bewegungsgleichung nimmt so die Form an:

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} = -\left(-\frac{f''(x)}{16} + ax + b\right) \cdot y.$$

Wir können also unsere sämmtlichen Betrachtungen mutatis mutandis wiederholen, indem wir nur bemerken, dass wir jetzt Anziehung haben wo wir früher Abstossung hatten, und umgekehrt. Wir sehen also, dass diejenigen Hülfsgeraden $y = ax + b$, welche m Halboscillationen im Segmente $m_1 m_2$ hervorrufen, nach wie vor eine Hülfscurve umhüllen, welche keine Wendepunkte besitzt und die Endordinaten des Segmentes bezw. des Intervalls der x-Axe zu Asymptoten hat. Nur wird diese Hülfscurve jetzt convex nach unten sein, und immer weiter nach oben liegen, je grösser der Werth von m ist.

§ 3. Das Oscillationstheorem für die Laméschen Curven $n = 5$.

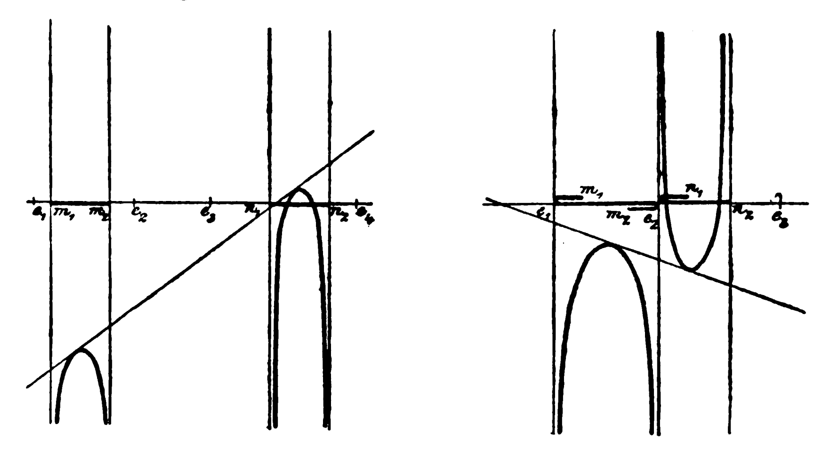
Durch die Untersuchungen des vorigen Paragraphen haben wir alle Mittel bereit gestellt, um nun das bereits oben genannte fundamentale Oscillationstheorem zu beweisen. Dasselbe lautet, wenn wir dasselbe so einschränken, wie es für unsere Zwecke ausreicht, folgendermassen:

Die accessorischen Parameter a und b einer Laméschen Gleichung $n = 5$ können stets und nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass eine

*) Vergl. Bemerkung S. 49.

erste Particularlösung existirt, welche in einem ersten beliebigen Segmente $m_1 m_2$ eines Intervalles der reellen x-Axe genau m Halboscillationen ausführt, und gleichzeitig eine andere Particularlösung existirt, welche in einem beliebigen Segmente $n_1 n_2$ eines anderen Intervalles genau n Halboscillationen ausführt.

Dieses Theorem werden wir unseren früheren Verabredungen entsprechend nur unter der Voraussetzung beweisen, dass beide Segmente ganz im Endlichen liegen. Zu dem Zwecke fassen wir einfach die zwei Hülfscurven in's Auge, welche den Segmenten $m_1 m_2$ bezw. $n_1 n_2$ betreffs der Oscillationszahlen m, bez. n, zugehören. Da wir ausdrücklich verlangt haben, dass diese Segmente in verschiedenen Intervallen liegen sollen, so werden diese Hülfscurven in zwei von ihren Asymptoten abgegrenzten verticalen Streifen liegen, welche nicht über einander greifen. Wie die Hülfscurven innerhalb dieser Streifen gestaltet sein mögen, ob sie beide nach derselben Seite, oder die eine nach oben die andere nach unten convex sind, und wie weit jede von ihnen nach oben oder nach unten geschoben ist, darauf kommt für unseren Zweck nichts an. Denn wir sehen sofort, dass abgesehen von einer im Grenzfalle etwa vorhandenen gemeinsamen Asymptote, immer eine und nur eine Tangente den beiden Hülfscurven gemeinsam sein wird; man vergleiche die beigesetzten Figuren. Aber hiermit ist unser Oscillationstheorem bereits bewie-



sen. Denn diese eindeutig bestimmte, immer existirende, gemeinsame Tangente, ist augenscheinlich die einzige Hülfsgerade, welche die vorgeschriebene Anzahl von Halboscillationen in den beiden Segmenten hervorruft*).

*) Wir führen noch folgendes verallgemeinertes Oscillationstheorem (K) an, dessen Beweis sich ganz ähnlich führen lässt, wie im einfachen Falle des Textes:

Die accessorischen Parameter a und b einer Laméschen Gleichung $n = 5$ können stets und nur auf eine Weise so bestimmt werden, dass die Gleichung eine erste Lösung besitzt, welche in den Endpunkten eines beliebigen ersten Segmentes $m_1 m_2$ eines Intervalles der reellen x-Axe beliebig vorgeschriebene

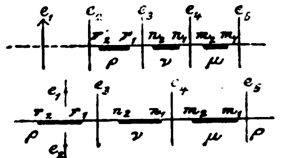
§ 4. Ueber eine schematische Bezeichnung des allgemeinen Cyclidensechsflachs und über die zu diesem Sechsflach gehörigen Laméschen Producte.

Wir wollen uns in diesem und dem folgenden Paragraphen mit Körpern beschäftigen, die von sechs allgemeinen confocalen Cycliden durchaus rechtwinkelig begrenzt sind, und die wir der Kürze halber als allgemeine Cyclidensechsflache bezeichnen werden. Die Begrenzungsflächen eines solchen Körpers mögen durch folgende Cyclidenflächen gebildet werden:

$$\mu = m_1, \quad \mu = m_2, \quad \nu = n_1, \quad \nu = n_2, \quad \rho = r_1, \quad \rho = r_2.$$

Hierdurch sind nun zwar die Begrenzungsflächen des Körpers festgelegt, aber der Körper selbst ist noch nicht vollständig definirt, vielmehr müssen wir noch wissen, wie sich derselbe zwischen diesen Seitenflächen erstreckt. Diese wollen wir nun mit Hülfe geeigneter Schemata anschaulich zu machen suchen.

Denken wir uns zunächst unseren Körper in der Gestalt eines nur wenig verzerrten rechtwinkligen Parallelopepidons, welches keine der Symmetriekugeln des Cyclidensystems durchsetzt oder auch nur erreicht. Einen solchen einfachen Körper können wir offenbar in den zwei allgemeinen Fällen I'a) und I''a) durch die nebenstehenden Schemata charakterisiren. Dieselben sind so zu verstehen, dass wir zunächst den Endpunkten m_1, n_1, r_1 einen bestimmten der 16 bezw. 8 reellen Raumpunkten zuordnen, die überhaupt dem genannten Punkttripel entsprechen, und nun verabreden, dass wir von da durch Continuität weiter gehen wollen. In der That ist ersichtlich, dass einem Punkttripel, dessen einzelne Punkte in den Segmenten $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, $r_1 r_2$ liegen, auf diese Weise ein einziger Raumpunkt entsprechen wird, von dem dann festgesetzt sein soll, dass er innerhalb des betreffenden Körpers liegt.



Jetzt wollen wir unseren Körper eine etwas complicirtere Gestalt annehmen lassen. Denken wir uns nämlich, dass der anfänglich nahezu würfelförmige Körper sich in einer Richtung verlängert, indem etwa der Punkt m_1 des Schemas sich dem Punkte e_5 nähert (während die anderen fünf Punkte m_2, n_1, n_2, r_1, r_2, und folglich auch die entsprechenden Seitenflächen des Körpers zunächst noch fest bleiben). Ist schliesslich der Punkt m_1 bis zum Punkte e_5 gekommen, so wird sich unser Körper gerade bis zur entsprechenden eintheiligen Symmetriekugel erstrecken. Wollen wir nun aber den Körper in gleicher Rich-

---

Werthe von $y/\frac{dy}{dt}$ besitzt und innerhalb dieses Segmentes m-Mal verschwindet während eine andere Lösung in den Endpunkten eines Segmentes $n_1 n_2$ eines anderen Intervalles ebenfalls beliebig vorgeschriebene Werthe von $y/\frac{dy}{dt}$ besitzt und innerhalb des Segmentes n-Mal verschwindet.

Dieses Theorem reducirt sich auf das einfache Theorem des Textes, falls in beiden Endpunkten beider Segmente $y/\frac{dy}{dt} = 0$ vorgeschrieben ist.

tung noch weiter wachsen lassen (so dass er also die Symmetriekugel durchdringt), so wird der Punkt m_1 offenbar auf seinem Wege umkehren müssen, und das Segment $m_1 m_2$ unseres Schema's wird dann, indem es sich im Punkte e_5 umbiegt, das Intervall $e_4 e_5$ zum Theile mehrfach überdecken. Nichts hindert den Verlängerungsprocess beliebig weiter gehen zu lassen, wobei sich das Segment $m_1 m_2$ beliebig oft um das Intervall $e_4 e_5$ herumwickeln wird. Hierdurch wird allerdings unser Körper vorkommendenfalls gewisse Theile des Raumes mehrfach erfüllen, aber dies ist eine Möglichkeit, welche wir nicht auszuschliessen brauchen, da sie in unsere Betrachtungen keine wirkliche Complication einführen wird.

Das hiermit geschilderte Verfahren, welches wir nur erst bei der einen Seitenfläche unseres Körpers in Anwendung brachten, können wir nun ersichtlich gleichzeitig in Bezug auf die anderen Seitenflächen des Körpers Platz greifen lassen. Wir kommen so auf den Satz:

Das allgemeine Cyclidensechsflach wird durch ein Schema charakterisirt, welches aus drei Segmenten $m_1 m_2$, $n_1 n_2$, $r_1 r_2$ besteht, die bezw. in den Intervallen μ, ν, ρ der reellen λ-Axe liegen, aber diese Intervalle, oder Theile derselben beliebig oft überdecken können*).

Aus Gründen, welche wir im nächsten Paragraphen näher erläutern werden, wollen wir jetzt ein Laméśches Product, welches auf fünf Seitenflächen eines Cyclidensechsflachs verschwindet, als zu dem Sechsflache gehörend bezeichnen. Wir sehen sofort, dass die Laméschen Funktionen (bezw. Formen), aus welchen sich diese Laméschen Producte zusammensetzen, geradezu durch das Oscillationstheorem des vorigen Paragraphen zu bestimmen sind. Fassen wir z. B. ein Lamésches Product in's Auge, welches auf den Seitenflächen m_1, m_2, n_1, n_2, r_1 verschwinden soll. Die drei Faktoren dieses Productes wollen wir mit $E'(\mu)$, $E''(\nu)$, $E'''(\rho)$ bezeichnen. Da ist zunächst jedenfalls Folgendes klar: Was auch die Werthe der accessorischen Parameter sein mögen, welche in der zu diesen Laméschen Funktionen gehörigen Differentialgleichung auftreten, wir können die Particularlösungen E', E'', E''' sicher so auswählen, dass sie bezw. in den Punkten m_1, n_1, r_1 der λ-Axe verschwinden. Dann aber können wir mittelst des Oscillationstheorems die accessorischen Parameter so bestimmen, dass die Zweige E' bezw. E'' in den Segmenten $m_1 m_2$ bezw. $n_1 n_2$ genau m bezw. n Halboscillationen ausführen; wir werden dies dadurch andeuten, dass wir $E_{m,n}(\lambda)$ schreiben. Unser Lamésches Product lautet also:

$$E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\rho),$$

und wir sehen sofort, dass dieses Product wirklich auf den fünf Seitenflächen m_1, m_2, n_1, n_2, r_1 des Körpers verschwindet. Indem wir nun hier den Oscillationszahlen m, n der Reihe

---

*) Selbstverständlich können diese Cyclidensechsflache ebensogut durch den unendlich weiten Raumpunkt hindurchziehen als durch irgend einen anderen Punkt. Das macht vermöge der Auffassungsweise der Geometrie der reciproken Radien überhaupt keinen Unterschied. Ebenso dürfen die Segmente der λ-Axe sich beliebig durch den Punkt $\lambda = \infty$ hindurchziehen. Nur der Einfachheit unserer Darstellung halber werden wir hier, wie früher, voraussetzen, dass dies nicht der Fall ist. Vergl. hierzu S. 34.



nach alle ganzzahlige positive Werthe beilegen, bekommen wir die sämmtlichen Laméschen Producte, welche auf den fünf genannten Seitenflächen verschwinden. Offenbar hätten wir nur die Particularlösung E''' in anderer Weise auszusuchen brauchen, um alle Laméschen Producte zu haben, die auf den fünf Seitenflächen m_1, m_2, n_1, n_2, r verschwinden. Hätten wir andererseits das Oscillationstheorem auf die Segmente μ und ρ, resp. ν und ρ in Anwendung gebracht, so würden wir bei geschickter Auswahl der Particularlösungen sämmtliche Lamésche Producte erhalten haben, welche auf fünf anderen Seitenflächen unseres Körpers verschwinden. Damit haben wir aber die Gesammtheit der zum Körper gehörigen Producte wirklich gebildet.

§ 5. Lösung der auf allgemeine Cyclidensechsflache bezüglichen Randwerthaufgabe.

Das allgemeine Problem der Randwerthaufgabe für unser Cyclidensechsflach, zu dessen Betrachtungen wir uns jetzt hinwenden, können wir von vorneherein, wie dies bei derartigen Aufgaben von jeher üblich ist, in sechs einfachere Randwerthaufgaben spalten, indem wir jeweils das Potential auf nur einer der sechs Begrenzungsflächen beliebig gegeben denken, auf den anderen fünf aber als Werth des Potentials gleichförmig Null vorschreiben. Die Summe der sechs so definirten Potentiale wird offenbar das gesuchte Potential sein (welches auf allen sechs Seitenflächen des Körpers beliebig vorgeschriebene Werthe annimmt).

Wir wollen uns also auf eins dieser Einzelprobleme beschränken, etwa um die Ideen zu fixiren auf dasjenige, bei welchem das Potential auf der Begrenzungsfläche $\rho = r_2$ die willkürlich vorzugebenden Werthe $F(\mu, \nu)$ anzunehmen hat, auf den anderen fünf Flächen aber verschwinden soll.

Nun haben wir aber schon zu Anfang dieses Kapitels gesagt, dass wir das gesuchte Potential in der Form einer Doppelsumme bilden wollen, deren Glieder den gemeinschaftlichen Faktor besitzen:

$$T = \left(\frac{\sum_1^5 {}_i \frac{x_i}{R_i}}{\sqrt{\sum_1^5 {}_i e_i x_i^2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir können daher von vornherein diesen Faktor abtrennen und uns nach einer Funktion ψ*) fragen, welche auf der Seitenfläche $\rho = r_2$ die beliebig vorzuschreibenden Werthe:

$$f(\mu, \nu) = \frac{F(\mu, \nu)}{T},$$

annimmt, auf den anderen fünf Begrenzungsflächen verschwindet, und

*) D. h. eine Funktion, welche der partiellen Differentialgleichung von S. 38 genügt. Dieser Gleichung braucht natürlich nur innerhalb des Körpers genügt zu werden.

nebst ihren ersten Differentialquotienten innerhalb des Körpers eindeutig und stetig verläuft.

Nun haben wir aber die Producte:

$$E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\rho)$$

im vorigen Paragraphen bereits so eingeführt, dass sie die gesammten Bedingungen sämmtlich erfüllen bis auf die eine auf die Seitenfläche $\rho = r_2$ bezügliche, und dasselbe gilt also auch von jeder linearen Verbindung beliebig vieler solcher Produkte, jedenfalls so lange dieselbe nur aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht.

Nun werden wir hier so verfahren wie es in ähnlichen Fällen seit je üblich ist, dass wir nämlich von der endlichen Summe zu einer unendlichen Reihe übergehen, welche zunächst unbestimmte Coefficienten besitzt, und diese Coefficienten dann so bestimmen, dass auch die Grenzbedingung auf der sechsten Seitenfläche befriedigt wird. Wir haben hiernach folgenden Ansatz: Um die Lösung der vereinfachten Randwerthaufgabe zu bekommen, brauchen wir nur in der Reihenentwickelung:

$$\psi = \sum_1^{\infty}{}_m \sum_1^{\infty}{}_n A_{m,n} \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'''_{m,n}(\rho)$$

die Coëfficienten $A_{m,n}$ so zu bestimmen, dass folgende Formel gilt:

$$f(\mu, \nu) = \sum_1^{\infty}{}_m \sum_1^{\infty}{}_n A_{m,n} \cdot E'''_{m,n}(r_2) \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu).$$

Die Möglichkeit einer derartigen Darstellung des $f(\mu, \nu)$ durch eine convergente Reihe soll dabei vorausgesetzt werden, wie auch, dass die Doppelsumme ψ der für ihre einzelnen Glieder geltenden partiellen Differentialgleichung genügt.

Setzen wir dann:

$$A_{m,n} \cdot E'''_{m,n}(r_2) = B_{m,n},$$

so haben wir als unsere nächste Aufgabe die Berechnung der Coefficienten der Reihenentwickelung:

$$f(\mu, \nu) = \sum_1^{\infty}{}_m \sum_1^{\infty}{}_n B_{m,n} \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu).$$

Hierzu verfahren wir auch wieder in herkömmlicher Weise, ohne die Zulässigkeit des Verfahrens weiter in Untersuchung zu ziehen. Wir multipliciren nämlich die obenstehende Reihe mit dem Ausdrucke:

$$(\mu - \nu) \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot du \cdot dv,$$

(wo u und v die schon öfters benutzten hyperelliptischen Integrale bezeichnen sollen), und integriren jedes einzelne Glied der so entstehenden Gleichung über diejenigen Segmente der u und v Axe, welche den Segmenten $m_1 m_2$ und $n_1 n_2$ der Intervalle μ und ν der λ-Axe

entsprechen. Hierbei entstehen rechterhand unendlich viele Glieder von der Form:

$$\iint (\mu-\nu)\, E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu) \cdot E'_{\overline{m},\overline{n}}(\mu) \cdot E''_{\overline{m},\overline{n}}(\nu) \cdot du \cdot dv$$

und nun behaupten wir, dass alle diese Glieder wegfallen mit Ausnahme des einen, für welches $m = \overline{m}$ und $n = \overline{n}$. Auf den Beweis dieser Behauptung (welcher sich mittelst der auf S. 33 gegebenen Form 4) der Laméschen Gleichung ohne weiteres führen lässt) gehen wir der Kürze halber nicht näher ein. Wir schildern vielmehr sofort das weitere Verfahren. Wir bekommen auf die genannte Weise als Ausdruck für die Coefficienten $B_{m,n}$:

$$B_{m,n} = \frac{\iint (\mu-\nu) \cdot f(\mu, \nu) \cdot E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu)\, du \cdot dv}{\iint (\mu-\nu)\, [E'_{m,n}(\mu) \cdot E''_{m,n}(\nu)]^2\, du \cdot dv};$$

daraus dann durch die Relation:

$$A_{m,n} = \mathrm{B}_{m,n} / E'''_{m,n}(r_1)$$

die Coefficienten $A_{m,n}$ der Reihenentwickelung von ψ, und endlich, wenn wir dieses ψ nur mit dem Faktor T multipliciren, das gesuchte Potential, welches die vorgelegte Randwerthaufgabe löst.

Die hierdurch gefundene Lösung unseres Problems begleiten wir noch mit einigen kritischen Bemerkungen:

a) Die reale Richtigkeit der zunächst nur als formal richtig erkannten Lösung ist nachzuweisen, indem die Convergenz der Reihenentwickelungen für f und ψ bewiesen wird, wie auch, dass die Reihe für f die Funktion f wirklich darstellt und dass die Reihe ψ derselben partiellen Differentialgleichung genügt, wie ihre einzelnen Glieder. Dass wir diese Beweise nicht bringen ist eine erste grosse Lücke unserer Darstellung, welche hoffentlich durch spätere Untersuchungen noch wird ausgefüllt werden können.

Aber auch wenn die genannten Beweise alle erbracht wären, würden wir noch keineswegs im Stande sein, unsere Lösung zur numerischen Berechnung zu benutzen, was doch der Zielpunkt aller Untersuchungen der mathematischen Physik sein sollte. Des Näheren ist hierüber zu bemerken:

b) Ein erstes Desideratum ist: übersichtliche und brauchbare Darstellungen für die Fundamentallösungen der Laméschen Gleichung zu besitzen; die von uns gebrauchten Lösungen (diejenigen nämlich, welche bezw. in den Punkten m_1, n_1, r_1 verschwinden), werden wir später aus den Fundamentallösungen leicht additiv zusammensetzen.

c) Weiter haben wir noch die Aufgabe: die accessorischen Parameter a und b der Laméschen Gleichung durch die jeweils vorgeschriebenen Oscillationseigenschaften wirklich numerisch zu berechnen. Dies kommt, wie leicht zu sehen, darauf hinaus, dass wir unter den unendlich vielen reellen Wurzelpaaren zweier transcendenter Gleichungen ein bestimmtes herausgreifen und berechnen sollen.



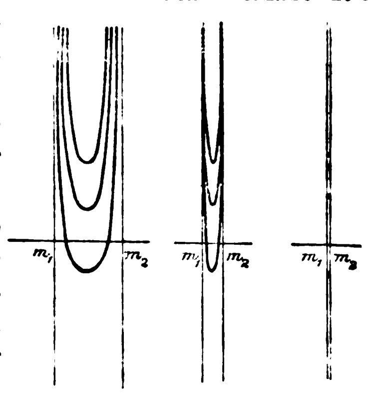
d) Es wäre auch sehr wünschenswerth und vermuthlich zur Erbringung der oben genannten Convergenzbeweise erforderlich: die m bez. n Wurzeln der Gleichungen $E'_{m,p}(\mu) = 0$ bezw. $E''_{m,p}(\nu) = 0$, welche in den Segmenten $m_1 m_2$ bezw. $n_1 n_2$ liegen, bequem berechnen oder doch separiren zu können.

e) Schliesslich wären Untersuchungen über die Doppelintegrale anzustellen, welche in den Coefficienten der Reihenentwickelungen von f und ψ vorkommen, insbesondere Methoden zu suchen, wie man dieselben bequem numerisch auswerthen kann.

§ 6. Ueber das Oscillationstheorem in den von uns zu betrachtenden Ausartungsfällen.

In diesem und dem weiter folgenden Paragraphen wollen wir diejenigen Principien entwickeln, welche sich als nöthig erweisen werden, um die Randwerthaufgabe für sämmtliche Ausartungen des allgemeinen Cyclidensechsflachs nach gemeinsamer Methode zu behandeln und damit der eigentlichen Fragestellung der Preisaufgabe zu entsprechen. Eine wirklich systematische und erschöpfende Discussion können wir aber leider, wie schon in der Einleitung gesagt wurde, nicht mehr geben, müssen uns vielmehr auf Andeutungen, betreffend die Hauptpunkte der Entwickelung, beschränken.

Wir knüpfen zunächst an § 4 an und untersuchen, wie weit das Oscillationstheorem bei der Laméschen Gleichung $n = 5$ bestehen bleibt, wenn zwei oder mehrere singuläre Punkte derselben zusammenfallen. Vor allen Dingen wollen wir den Fall ins Auge fassen, dass das Segment $m_1 m_2$ in einem Intervalle liegt, welches zwischen zwei fernerhin zusammenfallenden einfachen singulären Punkten liegt. Die continuirliche Aenderung der Gestalt der Hülfscurven des betreffenden Segmentes wird schematisch durch die nebenstehenden Figuren gezeigt, aus denen man sieht, dass in der Grenze jede Hülfscurve in einen Hülfspunkt ausgeartet ist, welcher auf der Ordinate des zweifachen singulären Punktes liegt, während die Hülfsgeraden, welche eine dieser Hülfscurven umhüllten, in die Geraden übergegangen sind, welche durch den bezüglichen Hülfspunkt hindurchgehen*). Das zweite von uns in Betracht zu ziehende Intervall $n_1 n_2$ der λ-Axe soll bei unserem Grenzübergange nicht weiter ausgeartet sein. Wir werden dann die Aufgabe haben, von dem Hülfspunkte des



*) Es mag noch bemerkt werden, dass wenn wir verlangen, dass eine Hülfsgerade durch einen bestimmten Hülfspunkt eines verschwindenden Intervalles hindurchgehen soll, wir hierdurch geradezu die Exponenten des zweifachen singulären Punktes festgelegt haben, wie sich unmittelbar aus der Laméschen Gleichung berechnen lässt. Dass umgekehrt die Festlegung des Exponenten eines zweifach singulären Punktes wirklich auf die Angabe gewisser Oscillationseigenschaften innerhalb des verschwundenen Intervalles hinauskommt, sieht man mit der grössten Anschaulichkeit, wenn man die conforme Abbildung vermittelst der Schwarzschen s-Funktion (vergl. Anm. S. 29) zu Hülfe zieht. Hierauf kann ich hier natürlich nicht näher eingehen.

verschwindenden Segmentes eine Tangente an die Hülfscurve eines nicht verschwindenden Segmentes zu legen, und wir sehen sofort, dass dies stets auf eine und nur auf eine Weise gemacht werden kann, so dass das Oscillationstheorem in diesem Falle ungeändert bestehen bleibt.

Sollten zwei zweifache singuläre Punkte vorhanden sein und das Segment $m_1 m_2$ in dem einen, das Segment $n_1 n_2$ in dem anderen verschwindenen Intervalle angenommen sein, so wird die Sache noch einfacher, indem wir nur noch die triviale Aufgabe haben, eine Hülfsgerade durch zwei Hülfspunkte zu ziehen.

Gehen wir jetzt zum Falle eines dreifachen singulären Punktes über und lassen wir zunächst das eine Segment in dem ersten, das andere in dem zweiten verschwindenden Intervall liegen. Die Hülfscurven beider Segmente werden natürlich wieder in Punkte ausarten. Diese Hülfspunkte können aber nicht mehr, wie beim zweifachen singulären Punkte allgemeine Lage haben.

Um dies zu zeigen bemerken wir, dass die Hülfspunkte des einen Segmentes auf der einen Seite der Curve dritter Ordnung $y = \frac{f''(x)}{16}$, diejenigen des anderen Segmentes auf der anderen Seite derselben Curve liegen müssen. Soll also die Hülfsgerade, welche den Hülfspunkt des einen Intervalles mit dem des anderen verbindet, nicht senkrecht zur x-Axe stehen (was $a = \infty$ ergeben würde und also keine brauchbare Bedeutung hat), so müssen die genannten zwei Hülfspunkte auf der Curve dritter Ordnung zusammenfallen. Nun hat aber die Ordinate der Curve dritter Ordnung in einem dreifachen singulären Punkte eine Nullstelle, so dass wir auf folgenden Satz kommen:

Bei einem dreifachen singulären Punkte rücken die Hülfspunkte jedes Segmentes des einen der verschwindenden Intervalle von der einen Seite, diejenigen eines Segmentes des anderen Intervalles von der anderen Seite unendlich nahe an die x-Axe heran.

Hieraus können wir weiter schliessen, dass, wenn die Hülfsgerade die Ordinate im dreifachen singulären Punkte oberhalb oder unterhalb der x-Axe trifft, in jedem Segmente des einen verschwindenden Intervalles unendlich starke Oscillation stattfinden wird, in jedem Segmente des anderen verschwindenden Intervalles aber unendlich starke »Abstossung« (um die Sprechweise unseres mechanischen Problems zu gebrauchen)*). Indem wir nun dieses Resultat mit dem Satz von S. 36 vergleichen, können wir sagen:

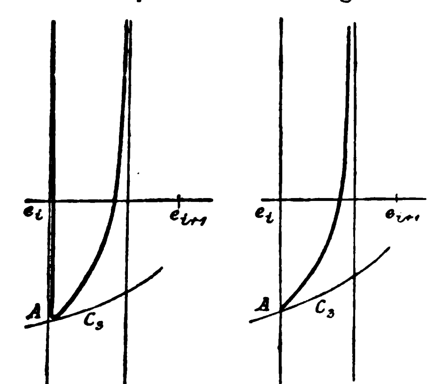
Im allgemeinen verhält sich eine Laméсche Gleichung $n = 5$ in einem dreifachen singulären Punkte irregulär, entsprechend dem Umstande, dass ihre Lösungen in jedem Segmente des einen dort verschwindenden

*) Dies giebt den auf S. 43 in Aussicht gestellten anschaulichen Grund, warum die Lamésche Gleichung für Kugelbüschel zum Falle $n = 4$ ausartet. Die Schemata für Kugelbüschel besitzen nämlich mehrfache Wurzeln, die drei verschiedenen Elementartheilern entsprechen. Wir sehen also: dass diese Ausartung nothwendig ist, damit nicht unendlich starke Oscillation oder Abstossung bei den anderen zwei Coordinaten eintritt.



Intervalles unendlich oft oscilliren. Wenn dagegen die Hülfsgerade der Laméschen Gleichung durch den dreifachen singulären Punkt der x-Axe selbst hindurchgeht, ist dies nicht mehr der Fall, und dementsprechend arten die Laméschen Funktionen $n = 5$ dann in der Weise aus, dass sie abgesehen von einem sich abtrennenden Faktor $(x - e_i)^{-\frac{1}{2}}$ dem Falle $n = 4$ angehören.

Jetzt gehen wir zu einer anderen Art von Specialfall über, indem wir unser eines Segment in ein solches nicht verschwindendes Intervall verlegen, welches an ein verschwindendes Intervall anstösst, und nun den mehrfachen singulären Punkt, auf welchen sich das verschwindende Intervall zusammengezogen hat, als den einen Endpunkt unseres Segmentes wählen. Die Hülfscurve dieses Segmentes wird dann eine wesentlich neue Gestalt annehmen. Diese Gestalt wird durch die zweite der nebenstehenden Figuren gezeigt, während die erste deren continuirliche Entstehung aus der gewöhnlichen Gestalt verständlich machen soll. Wegen dieser neuen Form der Hülfscurven wird nun das Oscillationstheorem, wo auch das andere Segment liegen mag, nicht mehr allgemein aufrecht zu erhalten sein*), vielmehr sieht man sofort, dass es jedenfalls nicht mehr für alle Oscillationszahlen gelten kann.



Schliesslich gehen wir zum Oscillationstheorem für geschlossene Segmente über. Wir wollen hier Intervalle betrachten, welche von zwei einfachen singulären Punkten begrenzt sind**), und zwar mag das Segment dieses Intervall genau l Mal umspannen. Hierdurch ist zunächst noch keine wesentliche Specialisirung eingetreten; wir wollen jetzt aber die zwei Endpunkte unseres Segments, welche schon zusammenfallen, ausdrücklich mit einander verschmelzen, d. h. wir wollen nicht mehr verlangen, dass die Lamésche Curve an den beiden Enden des Segments verschwindende Ordinaten hat, sondern dass sie (nach $2l$-maligem Durchlaufen des Intervalls) in sich selbst zurückläuft. Bei näherer Untersuchung kommen wir auf folgenden Satz:

Wir können sämmtliche von einander linear unabhängige Lamésche Funktionen, welche nach l-maliger Umlaufung des Intervalles $e_i e_k$ in sich selbst zurückkehren und innerhalb des so beschriebenen geschlossenen Segmentes $2k$ Mal***) verschwinden, dadurch bestimmen, dass

---

*) Eine Ausnahme hiervon bildet nur der Fall, dass das andere von uns in Betracht zu ziehende Segment im verschwindenden Intervalle von e_i liegt, wobei e_i als Doppelpunkt vorausgesetzt sein soll. Die Hülfspunkte dieses Segments werden dann nämlich unterhalb von A liegen, so dass von ihnen immer noch eine und nur eine Tangente an die Hülfscurve der Figur gezogen werden kann.

**) Bei einem mehrfachen singulären Punkte kann sich das Segment nicht umbiegen, sofern wir im Reellen bleiben wollen; es ist dann also die Frage nach geschlossenen Segmenten gegenstandslos.

***) Eine ungerade Anzahl von Verschwindungsstellen in einem geschlossenen Segmente ist unmöglich.

wir das Segment ins Auge fassen, welches von e_i als Endpunkt ausgehend die Hälfte des geschlossenen Segmentes ausfüllt, und nun erstens diejenigen Laméschen Funktionen auswählen, welche in den Endpunkten dieses Segmentes gleich Null sind und ausserdem innerhalb desselben $(k-1)$-Mal verschwinden, und zweitens diejenigen Laméschen Funktionen auswählen, deren erste Ableitungen nach t in den Endpunkten des Segmentes verschwinden und welche ausserdem innerhalb des Segmentes k Mal verschwinden.

Dieses Theorem (welches sich für gerades l noch etwas vereinfachen lässt) zeigt, indem wir das verallgemeinerte Oscillationstheorem (vergl. Bemerkung S. 53 — 54) zu Hülfe nehmen, dass durch die, nothwendig gerade, Anzahl von Nullstellen in einem geschlossenen Segmente nebst einer der uns sonst geläufigen Oscillationsbedingungen in einem gewöhnlichen Segmente eines anderen Intervalls die accessorischen Parameter einer Laméschen Gleichung wieder gerade eindeutig bestimmt sind.

§ 7. Ueber die Randwerthaufgabe für ausgeartete Cyclidensechsflache.

Unsere allgemeine Aufgabe wird jetzt sein, die in § 5 skizzirte Behandlung der Randwerthaufgabe vom allgemeinen Cyclidensechsflach auf alle die besonderen Körper zu übertragen, die aus letzterem durch particuläre Wahl der Begrenzungsflächen, bezw. durch Ausartung des Cyclidensystems entstehen können. Inzwischen wollen wir uns der Kürze halber darauf beschränken, nur an einigen Beispielen zu zeigen, wie weit die Principien des vorigen Paragraphen dabei eine Modification unserer allgemeinen Methode nöthig machen, bezw. eine Vereinfachung derselben bewirken. Zugleich nehmen wir nebenbei Gelegenheit, unseren Ansatz mit allen denjenigen Methoden zu vergleichen, die für einzelne der hier in Betracht kommenden Körper von anderer Seite bekannt sind (vergl. die historischen Vorbemerkungen).

Fassen wir zunächst einen Körper ins Auge, welcher von sechs confocalen Flächen zweiten Grades begrenzt ist. Hier haben wir es mit dem Flächensystem II a) zu thun, und wir bemerken, dass also die doppelt gezählte unendlich ferne Punktkugel als Mitglied der Schaar auftritt. Indem wir jetzt dieser Fläche, wie es natürlich scheint, den Parameterwerth $\lambda = \infty$ beilegen, reducirt sich der Faktor T (S. 45) auf eine Constante und unsere Laméschen Producte werden daher selbst zu Potentialen. Damit kommen wir aber gerade auf dasjenige besondere Problem, welches von Herrn Klein in seiner ersten Mittheilung (Math. Annalen Bd. 18, 1881) behandelt wurde; irgendwelche Modification des allgemeinen in § 5 gegebenen Ansatzes ist dabei unnöthig; der Unterschied ist nur, dass wir es mit solchen Laméschen Funktionen zu thun haben, bei denen zwei singuläre Punkte zusammenfallen.

Jetzt wollen wir fünf Seitenflächen dieses Körpers festhalten und die sechste, welche einem zweischaligen Hyperboloid angehören mag, sich so bewegen lassen, dass das zugehörige Segment der x-Axe, und folglich auch unser Körper, sich verlängert. Wir gehen hiermit so weit, bis das Segment sein Intervall genau viermal überdeckt. Es werden dann zwei gegenüberliegende Seitenflächen des Körpers zusammenfallen, während sich der Körper

selbst in der Gestalt eines Ringes zwischen ihnen erstreckt. Wir wollen nun verabreden, dass wir diese zwei zusammenfallenden Seitenflächen wegnehmen, d. h. den Körper in einen geschlossenen Ring verwandeln. Um dies anzudeuten, brauchen wir offenbar nur das betreffende Segment der λ-Axe in sich selbst zurücklaufen zu lassen. Wir erhalten so das nebenstehende Schema. Dabei bedeuten $\rho = r_1$ und $\rho = r_2$ die beiden Ellipsoide, $\nu = n_1$ und $\nu = n_2$ die beiden einschaligen Hyperboloide, die unseren ringförmigen Körper einschliessen.

Diesen Körper können wir nun noch weiter ausarten lassen, nämlich zu dem ganzen Zwischenraum zwischen den zwei Ellipsoiden r_1 und r_2. Hierzu haben wir nur die beiden Endpunkte des Segmentes $n_1 n_2$ derart in den Punkt e_4 rücken zu lassen, dass unser Segment das Intervall $e_3 e_4$ genau zweimal überdeckt. Zunächst wird dann freilich die einzelne Seitenfläche n_1 bezw. n_2 nur erst auf sich selbst zusammengeschrumpft sein zu einem doppeltüberdeckten Stücke der einen Symmetrieebene. Aber die so ausgearteten Seitenflächen wollen wir dann natürlich wegnehmen. Wir deuten dies in unserem Schema dadurch an, dass wir an jeden Endpunkt des Segmentes $n_1 n_2$ ein Kreuz setzen.

Auf ganz dieselbe Weise können wir endlich zum ganzen Innenraum des Ellipsoids $\rho = r_2$ übergehen, wie durch das nebenstehende Schema hinreichend erläutert sein wird.



Nun wollen wir kurz zusehen, wie wir die Randwerthaufgabe für dieses Vollellipsoid zu behandeln haben *). Wir müssen zunächst die zum Ellipsoid gehörigen Laméschen Producte aufsuchen, d. h. diejenigen Laméschen Producte, welche innerhalb des Ellipsoids nebst ihren ersten Differentialquotienten eindeutig, stetig, und endlich verlaufen **). Hierzu ist jedenfalls erforderlich, dass der Faktor $E'(\mu)$ dieses Productes nach zweimaligem Umlaufen des Intervalles $e_4 e_5$ in sich selbst zurückläuft. Nun überzeugen wir uns leicht vermittelst des auf S. 61—62 gegebenen Theorems, dass die nothwendige und hinreichende Bedingung hierfür darin besteht, dass $E'(\mu)$ sowohl in e_4 wie auch in e_5 ein Fundamentalzweig der Differentialgleichung sein soll. Ferner überzeugt man sich, dass man der Continuitätsbedingung, welche im Schema durch die dem Punkte e_4 beigesetzten Kreuze angedeutet ist, nur so genügen wird, dass man $E''(\nu)$ sowohl in e_4 wie in e_3 ebenfalls mit einem der beiden Fundamentalzweige der Laméschen Differentialgleichung zusammenfallen lässt und zwar im Punkte e_4 mit demselben Fundamentalzweige, dem dort $E'(\mu)$ gleich wird. Endlich bedeutet das dem Punkte e_3 beigesetzte Kreuz, dass dort $E'''(\rho)$ wieder denselben Fundamentalzweig vorstellen soll, wie $E''(\nu)$. Nun müssen wir natürlich auf die Intervalle μ und ν das Oscillationstheorem anwenden. Hierdurch kommen wir dann genau zu denselben Laméschen Producten, welche Lamé selbst seinerzeit zur Behandlung des Vollellipsoids in Anwendung gebracht hat, indem er ver-

---

*) Die Unterschiede zwischen unserer Methode und derjenigen, welche Herr Klein (l. c.) zur Behandlung dieses Problems angewandt hat, sind nur formell.

**) Im Allgemeinen werden die Laméschen Producte im vorliegenden Falle die Focalcurven des Ellipsoids als Verzweigungscurven besitzen.

langte, dass die drei Laméschen Funktionen $E'(\mu)$, $E''(\nu)$, $E'''(\rho)$ Zweige ein und derselben algebraischen Funktion von λ seien*).

Als zweites Beispiel nehmen wir einen Körper, welcher von sechs Flächen des Orthogonalsystems der gewöhnlichen Polarcoordinaten begrenzt ist. Wir müssen hier das Schema I'd) der auf S. 18—22 gegebenen Tabelle zugrunde legen. Unser Körper wird dabei durch ein endliches Segment des Intervalles $e_3 e_4$, ein Segment des verschwindenden Intervalles $e_4 e_5$, und ein Segment des endlichen Intervalles $e_2 e_3$ charakterisirt sein, welch letzteres aber unendlich kurz ist und unendlich dicht an den Punkt $e_1 = e_2$ herangerückt ist. Das Segment ν wird natürlich gewöhnliche Hülfscurven besitzen und das Segment μ Hülfspunkte (vergl. S. 59). Das Segment ρ wird ebenfalls, wie man leicht sieht, obwohl es in keinem verschwindenden Intervalle liegt, Hülfspunkte besitzen. In den sechs Einzelproblemen also, in welche wir unsere Randwerthaufgabe spalten können, werden wir entweder beide accessorische Parameter sofort bestimmen können (falls nämlich 2 Hülfspunkte neben einander in Betracht kommen), oder, wenn Oscillation im Segmente ν verlangt wird, doch nur eine transcendente Gleichung aufzulösen haben.

Wir mögen nun insbesondere annehmen, dass unser Körper sich bis an die Spitze des Kegels, oder aber ins Unendliche erstreckt, sodass das Segment ρ eine endliche Länge bekommt. Es werden sich dann die Hülfspunkte dieses Segmentes, sofern man für dasselbe nur eine endliche Zahl von Oscillationen in Betracht ziehen will, in einen einzigen Punkt der Ordinate im Punkte e_1 zusammengehäuft haben, was die Aufstellung unendlich vieler verschiedener Laméscher Producte unmöglich macht. Daher müssen wir jetzt zu solchen Hülfspunkten unsere Zuflucht nehmen, welche unendlich viele Oscillationen im Segmente ρ hervorrufen. Diese Hülfspunkte werden aber nicht mehr eine discrete sondern eine continuirliche Mannigfaltigkeit bilden, nämlich die Ordinate des Punktes e_1 in ihrer positiven

---

*) Was die ursprüngliche Schreibweise von Lamé angeht, vergl. man die Bemerkung auf S. 31. Andererseits bemerken wir, dass wir in unsere Formeln unter Beibehaltung der Annahme $e_1 = \infty$ die Bedingung $e_3 + e_4 + e_5 = 0$ einführen können, wodurch das zugehörige elliptische Integral t geradezu auf die Weierstrassische Normalform gebracht wird. Wir müssen aber beachten, dass wir dies nicht immer thun dürfen, sobald wir von unserem Falle zu den weiter ausgearteten Fällen durch Grenzübergang gelangen wollen. In der That können wir unter Festhaltung von $e_3 + e_4 + e_5 = 0$ nicht einen der im Endlichen gelegenen singulären Punkte ins Unendliche werfen, während die anderen zwei im Endlichen bleiben sollen, wie wir dies im Falle der Funktionen der zweiaxigen Cylinder thun müssten. Diese Unmöglichkeit hat Herr Häntzschel bemerkt (Dissertation, Berlin 1883, weiter ausgeführt in Schlömilchs Zeitschrift Bd. 31), aber da er sich nicht entschliessen konnte, von der Weierstrassischen Normalform der elliptischen Integrale abzuweichen, kam er zu dem Schlusse, dass die Funktionen der zweiaxigen Cylinder kein Specialfall der Funktionen der dreiaxigen Flächen zweiten Grades sein könnten, und dass folglich alle früheren Mathematiker, namentlich Heine, sich in diesem Punkte geirrt hätten!

An dieser Stelle mögen auch die berühmten Resultate Hermites betreffend die Lösung der Laméschen Gleichung mittelst elliptischer Funktionen erwähnt werden. Dieselben beziehen sich aber nur auf eine besondere Festlegung des einen accessorischen Parameters der Differentialgleichung (des Parameters a) und fallen daher nicht in den Bereich unserer Darstellung.

Hälfte vollständig überdecken. Dementsprechend wird sich das eine Summenzeichen in der Lösung unserer Potentialaufgabe in ein Integralzeichen verwandelt haben. Ein Specialfall des hiermit bezeichneten Problems ist von Herrn Mehler *) behandelt worden, der die besonderen Kugelfunktionen, welche dabei auftreten, als Kegelfunktionen bezeichnete **).

Wir kehren noch einmal zu dem Körper zurück, welcher von sechs beliebigen Flächen unseres Orthogonalsystems begrenzt ist, und bemerken, dass für ihn unsere Theorie im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmt, welche Herr Thomson in dem schon erwähnten »Appendix B« der Natural Philosophy gibt. Allerdings werden dort nur solche Körper ausdrücklich erwähnt, welche von höchstens vier Flächen unseres Orthogonalsystems begrenzt sind. Immerhin bedarf es noch einiger Bemerkungen, um auch nur für diese besonderen Körper die in Rede stehende Uebereinstimmung hervortreten zu lassen, ebenso wie die Uebereinstimmung unseres Ansatzes mit denjenigen Resultaten, welche Laplace ursprünglich für die Vollkugel abgeleitet hat ***).

Es handelt sich hauptsächlich darum, den Radius r der concentrischen Kugeln anstatt des imaginären Winkels einzuführen (vergl. S. 42), welchen diese Kugeln mit einander bilden (während wir den früher gleichfalls benutzten Winkel φ, den die Meridianebenen mit einer unter ihnen bilden, als Coordinate beibehalten). Wir setzen ferner $e_1 = e_2 = \infty$, $e_3 = 1$, $e_4 = e_5 = 0$, und führen als unsere dritte Coordinate die halbe Winkelöffnung der am Coordinatensystem betheiligten Kegel ein, welche wir mit ϑ bezeichnen wollen (so dass also $\nu = \sin^2\vartheta$). Dann haben wir in r, φ, ϑ gerade die gewähnlichen Polarcoordinaten, welche von Laplace und schliesslich auch von Herrn Thomson zu Grunde gelegt werden. Wenn wir nun näher zusehen, so zeigt sich, dass die Faktoren in φ und ϑ, welche in unseren Laméschen Producten vorkommen, mit den bei Herrn Thomson auftretenden entsprechenden Faktoren genau übereinstimmen. Allein es scheint zunächst eine Abweichung in dem Faktor vorzuliegen, der sich auf r bezieht. Herr Thomson findet nämlich für denselben die Form: $Lr^n + Mr^{-n-1}$, während wir andererseits zu der Gestalt geführt werden: $Lr^e + Mr^{-e}$. Dieser Unterschied fällt nun einfach dadurch weg, dass unser Lamésches Product noch mit dem Faktor T zu multipliciren ist, und dass sich in unserem Falle dieses T auf $r^{-\frac{1}{2}}$ reducirt.

Schliesslich sollten wir eigentlich noch ein Beispiel anführen, bei welchem die Figur

---

*) Math. Ann. Bd. 18 S. 161. Vergl. auch die unmittelbar hierauf l. c. folgende Abhandlung von Herrn C. Neumann.

**) Diejenigen Funktionen nämlich, welche Heine in seinem Handbuche schlechtweg als Kugelfunktionen (bezw. als zugeordnete Funktionen) bezeichnet, oscilliren nicht im Intervalle ρ; Herr Mehler sah sich dadurch veranlasst, für seine Funktionen eine neue Benennung in Vorschlag zu bringen.

***) Um die Randwerthaufgabe für die Vollkugel nach unserer Methode zu lösen, müssen wir offenbar im Intervalle ν Oscillationen verlangen. Trotzdem lassen sich die beiden accessorischen Parameter der zugehörigen (ausgearteten) Laméschen Gleichung ohne Auflösung einer transcendenten Gleichung bestimmen. Dies hängt damit zusammen, dass des Segment, welches im Intervalle ν liegt, letzteres genau zweimal überdeckt.

von Seite 61 in Anwendung kommen würde. Ich unterlasse dies nur deshalb, weil mir nicht bekannt ist, dass ein solcher Fall bis jetzt behandelt wäre, und also ein Vergleich mit anderweitig abgeleiteten Resultaten nicht angestellt werden kann*). Ich beschränke mich also darauf, anzudeuten, dass wir im Allgemeinen in dem Maasse, wie das Oscillationstheorem versagt, unsere Zuflucht zu unendlich grossen Zahlen von Oscillationen im angegebenen Segmente nehmen müssen, wodurch wir auf Integraldarstellungen kommen, welche denjenigen von Fourier und Herrn Mehler ähnlich sind.

Hierauf, sowie auf die anderen in diesem und dem letzten Paragraphen nur flüchtig berührten Punkte, hoffe ich demnächst in viel ausführlicherer Weise eingehen zu können, wobei sich herausstellen wird, dass sogar in den wiederholt bearbeiteten Gebieten der Kugelfunktionen und Besselschen Funktionen noch Manches durch unsere Methoden zu finden übrig bleibt.

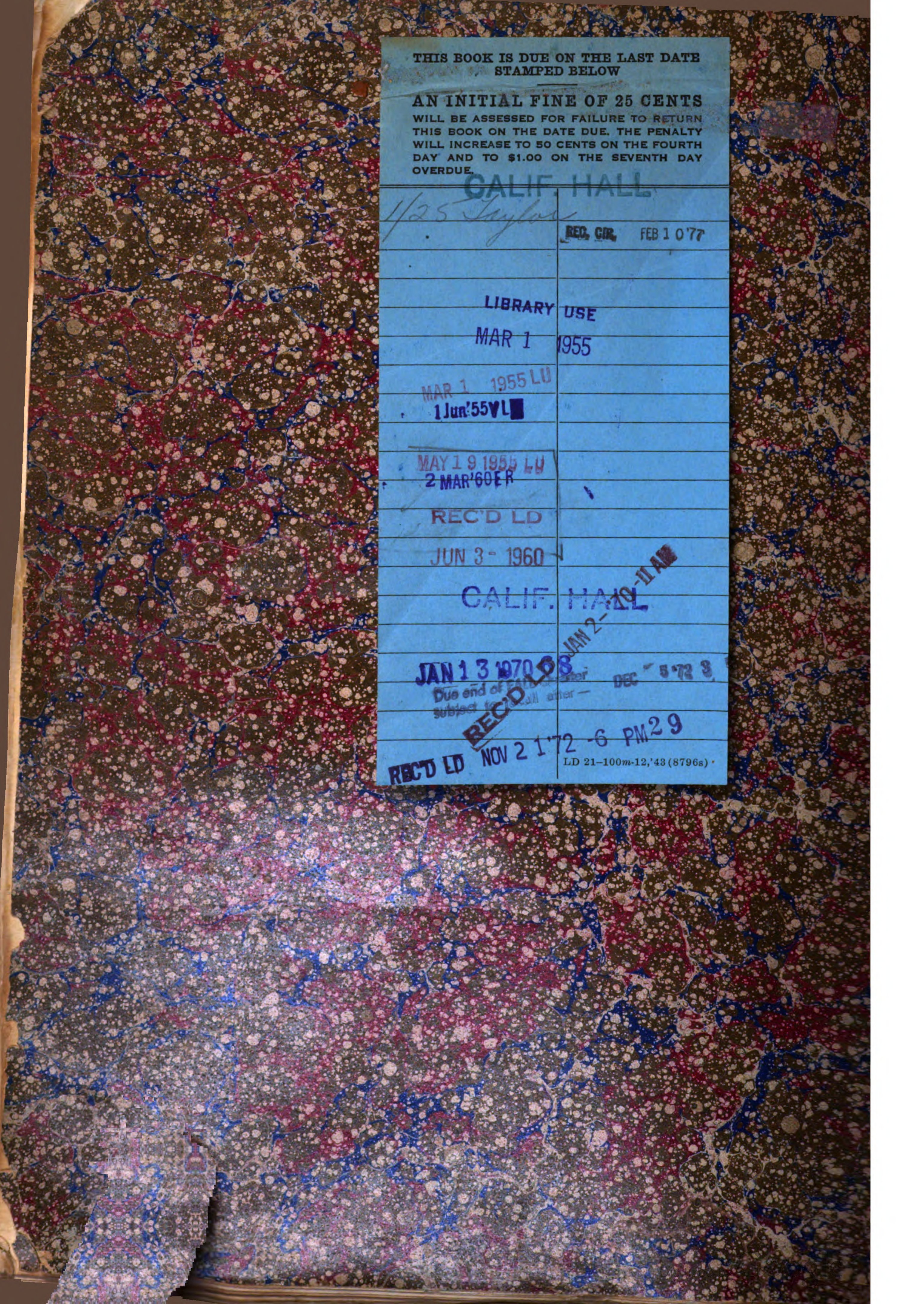
---

*) Wohl aber würden wir viele in der Literatur behandelte Fälle heranziehen können (den Fall des Rotationscylinders und der Vollkugel z. B.), welche zur Erläuterung der auf S. 61 beigefügten ersten »Bemerkung« geeignet wären.

Lebenslauf.

Ich, Maxime Bôcher, bin am 28. August 1867 zu Boston im Staate Massachusetts in Amerika geboren, wo mein Vater Professor der neueren Sprachen am Polytechnikum war. Nach Uebersiedelung desselben an die Harvard-Universität in der Nachbarstadt Cambridge (im Jahre 1871) besuchte ich der Reihe nach verschiedene Schulen in Boston und Cambridge, hauptsächlich aber wurde das Interesse für die Wissenschaft in mir durch den anregenden Einfluss meiner Eltern erweckt. Ich habe dann, von Herbst 1883 an, an der Harvard-Universität fünf Jahre lang dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften obgelegen, wobei ich insbesondere bei den Herren Byerly, B.O. Peirce und J.M. Peirce Vorlesungen hörte. Nachdem ich im Juni 1888 zum Baccalaureus artium promovirt worden war, begab ich mich Michaelis desselben Jahres nach Göttingen und habe seitdem dort meine Studien bei den Herren Klein, Schoenflies, Schur, Schwarz und Voigt fortgesetzt. Allen meinen Lehrern spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aus, insbesondere aber Herrn Prof. F. Klein, der mich zu weitergehenden wissenschaftlichen Arbeiten anregte.

Göttingen im Juli 1891.



THIS BOOK IS DUE ON THE LAST DATE STAMPED BELOW
AN INITIAL FINE OF 25 CENTS
WILL BE ASSESSED FOR FAILURE TO RETURN THIS BOOK ON THE DATE DUE. THE PENALTY WILL INCREASE TO 50 CENTS ON THE FOURTH DAY AND TO $1.00 ON THE SEVENTH DAY OVERDUE.
CALIF. HALL
1/25 Taylor
REC. CIR. FEB 10'77
LIBRARY USE
MAR 1 1955
MAR 1 1955 LU
1 Jun'55VL
MAY 19 1955 LU
2 MAR'60ER
REC'D LD
JUN 3 - 1960
CALIF. HALL
JAN 13 1970 68
JAN 2 - 10 - 11 AM
REC'D LD
DEC 5 '72 3
REC'D LD NOV 21'72 -6 PM 29
LD 21-100m-12,'43 (8796s)



YE00153
CALIF. HALL
ACC
87
v.31
53954

